Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 134-142

УДК 517.5

П. В. Задерей, О. М. Пелагенко
(Київ. нац. ун–т технологій та дизайну)

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ

Отримано необхідні умови в термінах перетворень Фур'є для збіжності в середньому інтегралів Фур'є сумовних на R функцій.

Нехай $L_p(R) = L_p(-\infty, \infty),\ 1 \leq p < \infty,$ — множина вимірних на дійсній осі R функцій $f(x)$, p-й степінь модуля яких інтегровний за Лебегом, з нормою

$$||f||_{L_p(R)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а

$$c(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-ixt} dt$$

— комплексне перетворення Фур'є функції $f \in L_1(R)$.

Покладемо

$$S_\sigma(f; x) = \int\limits_{-(\sigma+1)}^{\sigma+1} c(s)\ e^{isx} ds,$$

де $\sigma \geq 1$.

Будемо казати, що інтеграл $S_\sigma(f; x)$ збігається в середньому до функції $f(x)$, якщо при $\sigma \to \infty$

$$||f - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} \to 0. \tag{1}$$

Як загальноприйнято, через $E_{\sigma+1}$ позначимо сукупність цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma + 1$, через $B_{\sigma+1}$ — сукупність всіх цілих функцій $f(z) \in E_{\sigma+1}$, для яких $\sup\limits_{x \in R} |f(x)| < < \infty$, а через W^2 — сукупність вимірних функцій $f(x),\ x \in R$, таких, що $\frac{f(x)}{1+|x|} \in L_2(R)$.

Метою даної роботи є знаходження умов, необхідних для виконання співвідношення (1).

Теорема 1. *Нехай $f(x) \in L_1(R)$. Для виконання співвідношення* (1) *необхідно, щоб при $\sigma \to \infty$*

$$\int\limits_1^\sigma \frac{|c(t+\sigma)| + |c(-t-\sigma)|}{t}\, dt \to 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для обмеженості інтегралів $S_\sigma(f; x)$ в просторі L_1 необхідно, щоб*

$$\int\limits_1^\sigma \frac{|c(t+\sigma)| + |c(-t-\sigma)|}{t} dt \leq C.$$

Зауваження. В [1] доведено, що для збіжності в середньому рядів Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

відповідно до функцій $c(\cdot)$ і $s(\cdot)$ з простору L_1 необхідно, щоб

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} = 0,$$

де L_1 — простір 2π-періодичних інтегровних функцій $f(x)$ з нормою $||f||_{L_1} = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx$.

Теореми 1 і 2 є інтегральними аналогами теореми 1 з [1].

***Доведення теореми* 1.** Позначимо через

$$V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_\sigma(s)\ c(s)\ e^{isx} ds,$$

де

$$\lambda_\sigma(s) = \begin{cases} 1, & |s| \le \sigma + 1; \\ \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}, & \sigma + 1 \le |s| \le 2\sigma + 1; \\ 0, & |s| \ge 2\sigma + 1. \end{cases}$$

Функцію $V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)$ можна представити у вигляді

$$V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t) K_\sigma(t) dt,$$

де

$$K_\sigma(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_\sigma(s) e^{-ist} ds = \frac{2 \sin \frac{3\sigma+2}{2} t \sin \frac{\sigma}{2} t}{\pi \sigma t^2}.$$

Легко бачити, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_\sigma(t)|\, dt \le C \ln \frac{3\sigma+2}{\sigma} < \infty.$$

Очевидно, що

$$||f - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} \ge$$
$$\ge ||V_{2\sigma}^{\sigma}(f) - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} - ||f - V_{2\sigma}^{\sigma}(f)||_{L_1(R)}\,. \qquad (3)$$

Покажемо спочатку, що для будь-якої $f \in L_1(R)$ при $\sigma \to \infty$

$$||f - V_{2\sigma}^{\sigma}(f)||_{L_1(R)} \to 0.$$

Для функції $f \in L_1(R)$ існує ціла функція $g_\sigma(f;z) \in E_{\sigma+1}$ така, що при $\sigma \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)|dx = \inf_{g_\sigma(x)\in L_1(R)} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g_\sigma(x)|dx \to 0$$

[2, с. 61].

Оскільки ціла функція експоненціального типу, яка на дійсній осі належить простору $L_1(R)$, обмежена на R [3, с. 184], то $g_\sigma(f;z) \in B_{\sigma+1}$, а також $g_\sigma(f;x) \in W^2$.

Згідно з [3, с. 255]

$$V_{2\sigma}^{\sigma}(g_\sigma(f);x) \equiv g_\sigma(f;x). \tag{4}$$

Використовуючи (4), оцінимо норму

$$||f - V_{2\sigma}^{\sigma}(f)||_{L_1(R)} \le$$
$$\le ||V_{2\sigma}^{\sigma}(f) - g_\sigma(f)||_{L_1(R)} + ||f - g_\sigma(f)||_{L_1(R)} =$$
$$= ||V_{2\sigma}^{\sigma}(f - g_\sigma(f))||_{L_1(R)} + o(1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x-t) - g_\sigma(f;x-t)\right) K_\sigma(t)dt \right| dx + o(1) \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |K_\sigma(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - g_\sigma(f;x-t)|\, dxdt + o(1) \to 0$$

при $\sigma \to \infty$.

Нерівність (3) можна переписати у вигляді

$$||f - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} \geq$$

$$\geq ||V_{2\sigma}^{\sigma}(f) - S_\sigma(f)||_{L_1(R)} - ||f - V_{2\sigma}^{\sigma}(f)||_{L_1(R)} =$$

$$= \left\| \int\limits_{\sigma+1\leq|s|\leq 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx}ds \right\|_{L_1(R)} + o(1). \qquad (5)$$

Оцінимо перший доданок в (5).

Позначимо через $\widetilde{S}_\sigma(f;x)$ і $\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)$ функції, спряжені до функцій $S_\sigma(f;x)$ і $V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)$, відповідно,

$$\widetilde{S}_\sigma(f;x) = -i \int\limits_{-(\sigma+1)}^{\sigma+1} c(s)(\mathrm{sign}s)e^{isx}ds,$$

$$\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x) = -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_\sigma(s)c(s)(\mathrm{sign}s)e^{isx}ds.$$

Далі, наступна рівність очевидна:

$$\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x) - \widetilde{S}_\sigma(f;x) =$$

$$= -i \int\limits_{\sigma+1\leq|s|\leq 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ (\mathrm{sign}s)\ e^{isx}ds.$$

Зауважимо, що функція $c(x)$ неперервна на R [4, с. 371], а тому справедливі співвідношення

$$\frac{d}{dx}\left(V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x) - S_\sigma(f;x)\right) = i \int\limits_{\sigma+1\leq|s|\leq 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma} sc(s)e^{isx}ds,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)-\widetilde{S}_{\sigma}(f;x)\right)=$$
$$=\int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ s\ c(s)(\mathrm{sign}s)\ e^{isx}ds,$$

$$\frac{d}{dx}\left(V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)-S_{\sigma}(f;x)\right)+i\frac{d}{dx}\left(\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)-\widetilde{S}_{\sigma}(f;x)\right)=$$
$$=2i\int\limits_{\sigma+1}^{2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-s}{\sigma}\ s\ c(s)\ e^{isx}ds. \tag{6}$$

Застосуємо нерівність С.Н. Бернштейна [3, с. 190] для того, щоб оцінити норму виразу в правій частині (6)

$$2\left\|\int\limits_{\sigma+1}^{2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-s}{\sigma}\ s\ c(s)\ e^{isx}ds\right\|_{L_1(R)}\le$$

$$\le 2(2\sigma+1)\left\|\int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx}ds\right\|_{L_1(R)},$$

тому

$$\left\|\int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx}ds\right\|_{L_1(R)}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2\sigma+1}\left\|\int\limits_{\sigma+1}^{2\sigma+1}\frac{2\sigma+1-s}{\sigma}\ s\ c(s)\ e^{isx}ds\right\|_{L_1(R)}. \tag{7}$$

Аналогічно, використовуючи рівності

$$\frac{d}{dx}\left(V_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)-S_{\sigma}(f;x)\right)-i\frac{d}{dx}\left(\widetilde{V}_{2\sigma}^{\sigma}(f;x)-\widetilde{S}_{\sigma}(f;x)\right)=$$

$$= 2i \int\limits_{-(2\sigma+1)}^{-(\sigma+1)} \frac{2\sigma+1+s}{\sigma}\ s\ c(s)\ e^{isx} ds,$$

одержимо

$$\left\| \int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx} ds \right\|_{L_1(R)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\sigma+1} \left\| \int\limits_{-(2\sigma+1)}^{-(\sigma+1)} \frac{2\sigma+1+s}{\sigma}\ s\ c(s)\ e^{isx} ds \right\|_{L_1(R)}. \qquad (8)$$

Додавши дві попередні нерівності (7) і (8), знайдемо

$$\left\| \int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx} ds \right\|_{L_1(R)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2(2\sigma+1)} \left\| \int\limits_{1}^{\sigma+1} \frac{\sigma^2-s^2+\sigma+s}{\sigma} c(s+\sigma) e^{i(s+\sigma)x} ds \right\|_{L_1(R)} +$$

$$+\frac{1}{2(2\sigma+1)} \left\| \int\limits_{1}^{\sigma+1} \frac{\sigma^2-s^2+\sigma+s}{\sigma} c(-s-\sigma) e^{-i(s+\sigma)x} ds \right\|_{L_1(R)} =$$

$$=: I_1 + I_2. \qquad (9)$$

Позначимо через $\Phi_\sigma^1(s)$ функцію

$$\Phi_\sigma^1(s) = \begin{cases} \frac{\sigma^2-s^2+\sigma+s}{\sigma} c(s+\sigma), & 1 \le s \le \sigma+1, \\ 0, & \text{для всіх інших значень s.} \end{cases}$$

Тоді I_1 з (9) можна записати у вигляді

$$I_1 = \frac{1}{2(2\sigma+1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma^1(s) e^{isx} ds \right| dx. \tag{10}$$

Далі, через C будемо позначати абсолютні додатні сталі, можливо, різні в різних формулах.

Застосуємо теорему 4.2 з [5] для оцінки (10)

$$I_1 \geq \frac{C}{\sigma} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma^1(s) e^{isx} ds \right) e^{-itx} dx \right|}{t} dt =$$

$$= \frac{C}{\sigma} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left| \Phi_\sigma^1(t) \right|}{t} dt = C \int\limits_1^{\sigma+1} \frac{\sigma^2 - t^2 + \sigma + t}{\sigma^2 t} \left| c(t+\sigma) \right| dt =$$

$$= C \int\limits_1^{\sigma} \frac{|c(t+\sigma)|}{t} dt + o(1), \tag{11}$$

оскільки при $\sigma \to \infty$

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_1^{\sigma} |c(t+\sigma)| \, dt \leq \max_{t \in [\sigma+1, 2\sigma]} |c(t)| = o(1)$$

за теоремою Рімана–Лебега [4, с. 369].

Аналогічно, позначивши через $\Phi_\sigma^2(s)$ функцію

$$\Phi_\sigma^2(s) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 - s^2 + \sigma + s}{\sigma} c(-s-\sigma), & 1 \leq s \leq \sigma + 1, \\ 0, & \text{для всіх інших значень s,} \end{cases}$$

і застосувавши теорему з [5], одержимо

$$I_2 = C\int\limits_1^\sigma \frac{|c(-t-\sigma)|}{t}dt + o(1). \tag{12}$$

Об'єднуючи оцінки (9), (11) і (12), встановимо нерівність:

$$\left\|\int\limits_{\sigma+1\le|s|\le 2\sigma+1} \frac{2\sigma+1-|s|}{\sigma}\ c(s)\ e^{isx}ds\right\|_1 \ge$$

$$\ge C\int\limits_1^\sigma \frac{|c(t+\sigma)|+|c(-t-\sigma)|}{t}dt + o(1). \tag{13}$$

З (5) і (13) випливає твердження теореми 1.

1. *Задерей П.В., Смаль Б.А.* О сходимости в пространстве рядов Фурье // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 639–646.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. — 624 с.
3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 538 с.
5. *Hille E., Tamarkin J.D.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fund. Math. — 1935. — V. 25. — P. 329–352.