Збiрник праць Iн-ту математики НАН України 2007, Т.4, №1, 7-22

С.Б. Вакарчук, А.Н. Щитов
(Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШЕГО ОДНОСТОРОННЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

Отримано точнi значення величин найкращих одностороннiх наближень функцiй полiномами Хаара заданого порядку на класi H_ω, де ω — довiльний модуль неперервностi, та на класах функцiй обмеженої p-варiацiї.

1. На единичном отрезке $[0,1]$ введем двоичные интервалы: $\delta_m^k = \big((k-1)/2^m, k/2^m\big)$, $m \in \mathbb{Z}_+, k = \overline{1, 2^m}$. Система функций Хаара определяется на отрезке $[0,1]$ следующим образом (см., напр., [1]): $\chi_1(x) \equiv \chi_0^{(0)}(x) \equiv 1$, а для любого $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+, k = \overline{1, 2^m}$,

$$\chi_n(x) \equiv \chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2k-1}, \\ -2^{m/2}, & \text{если } x \in \delta_{m+1}^{2k}, \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} \overline{\delta_m^k}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ — замыкание множества $\mathcal{M}$. В точках разрыва функции Хаара равны полусумме пределов справа и слева. На концах отрезка $[0,1]$ они равны своим предельным значениям изнутри отрезка.

Пусть $\mathbb{P}_n$ есть подпространство, состоящее из множества полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_k(x)\,,\ \alpha_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}\ ,$$

построенных по первым n функциям системы Хаара.

Сопоставим функции f из некоторого пространства X следующие подмножества полиномов (см., напр., [2, с.33])

$$\mathbb{P}_n^+ = \big\{P_n(x) \in \mathbb{P}_n : \ P_n(x) \leqslant f(x),\, x \in [0,1]\big\},$$

$$\mathbb{P}_n^- = \big\{P_n(x) \in \mathbb{P}_n : \ P_n(x) \geqslant f(x),\, x \in [0,1]\big\},$$

где неравенства понимаются в смысле почти всюду. Величина

$$\widehat{E}_n^+(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf\left\{\|f(\cdot) - P_n(\cdot)\|_X : \ P_n \in \mathbb{P}_n^+\right\}$$

$$\Big(\widehat{E}_n^-(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf\left\{\|f(\cdot) - P_n(\cdot)\|_X : \ P_n \in \mathbb{P}_n^-\right\}\Big)$$

называется наилучшим односторонним приближением снизу "$+$" (сверху "$-$") функции $f \in X$ в метрике пространства X подмножеством полиномов $\mathbb{P}_n^+$ ($\mathbb{P}_n^-$) порядка n. Наследуя Фройда [3], введем также в рассмотрение величину

$$\widetilde{E}_n(f)_X \stackrel{\text{df}}{=} \inf\left\{\|P_n(\cdot) - p_n(\cdot)\|_X : \ P_n \in \mathbb{P}_n^-,\ p_n \in \mathbb{P}_n^+\right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Для произвольного множества $\mathcal{M} \subset X$ положим

$$\widehat{E}_n^{\pm}(\mathcal{M})_X \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f\in\mathcal{M}} \widehat{E}_n^{\pm}(f)_X, \quad \widetilde{E}_n(\mathcal{M})_X \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f\in\mathcal{M}} \widetilde{E}_n(f)_X.$$

Всюду далее полагаем: $\mathbb{N}_* \stackrel{\text{df}}{=} \big\{n : n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\big\}$; $h \stackrel{\text{df}}{=} 2^{-(m+1)}$;

$$n' \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 2^m, & \text{если } n = 2^m + k,\ m \in \mathbb{N},\ k = \overline{1, 2^m - 1}\,; \\ 2^{m+1}, & \text{если } n = 2^{m+1},\ m \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

2. Пусть $C \equiv C[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций f с нормой $\|f\|_C \stackrel{\text{df}}{=} \max\big\{|f(x)| : x \in [0,1]\big\}$, а Φ есть множество четных конечных неубывающих на $[0,\infty)$ функций φ, удовлетворяющих условиям $\varphi(0) = 0$; $\lim\big\{\varphi(x) :$

$x \to \infty\bigr\} = \varphi(\infty) = \infty$. Если $\varphi \in \Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначим множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций f, для каждой из которых $\displaystyle\int_0^1 \varphi\bigl(f(x)\bigr)\,\mathrm{d}x < \infty$. Для произвольных функций $f_1, f_2 \in \varphi(L)$ обобщенным φ–расстоянием между ними называют величину [4]

$$\rho_\varphi(f_1, f_2) = \int_0^1 \varphi\bigl(f_1(x) - f_2(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\ .$$

Для $f \in \varphi(L)$ используем обозначение $\|f\|_{\varphi(L)} \overset{\mathrm{df}}{=} \rho_\varphi(f, 0)$. Если, например, $\varphi(x) = |x|^p$, $1 \leqslant p < \infty$, то $\varphi(L)$ совпадает с нормированным пространством $L_p \overset{\mathrm{df}}{=} L_p[0,1]$ функций, интегрируемых в p-й степени. В этом случае $\|f\|_{\varphi(L)}$ есть p-я степень нормы $\|f\|_{L_p}$, где

$$\|f\|_{L_p} = \Bigl\{ \int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \Bigr\}^{1/p}. \tag{2}$$

Если $0 < p < 1$, то величина (2) не является нормой, но мы, тем не менее, сохраним указанное обозначение. При $0<p<1$ класс L_p является полным линейным метрическим пространством с метрикой $\rho_p\,(f, g) = \|\ f - g\ \|^p_{L_p}$.

Через $H_\omega \equiv H_\omega[0,1]$ обозначим класс функций $f \in C$, модуль непрерывности

$$\omega(f,t) = \sup\bigl\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [0,1], |x_1 - x_2| \leqslant t\bigr\}$$

которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(t)$.

Пусть f есть заданная на отрезке $[0,1]$ функция и $\xi \overset{\mathrm{df}}{=} \bigl\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\bigr\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Как и в [5], величину

$$\varkappa_p(f;\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \Bigr\}^{1/p},\ \ 1 \leqslant p < \infty\,,$$

будем называть вариационной суммой порядка p функции f по разбиению ξ. Пусть $V_p(f) = \sup\left\{\varkappa_p(f;\xi) : \xi\right\}$ есть p-вариация функции f на отрезке $[0,1]$. Обозначим через $V_p \equiv V_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, класс определенных на отрезке $[0,1]$ функций f таких, что $V_p(f) < \infty$. При $p=1$ это класс функций ограниченной вариации. Винер показал [5], что функции f из класса V_p, $1 \leqslant p < \infty$, могут иметь только разрывы первого рода. Отсюда вытекает, что если $f \in V_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то $f \in L_q$ для произвольного $1 \leqslant q < \infty$. Положим также

$$KV_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{f \in V_p :\ V_p(f) \leqslant K\right\}, \quad K > 0.$$

Следуя Лаву [6] и Юнгу [7], полагаем, что заданная на отрезке $[0,1]$ функция f принадлежит классу C_p, $1 \leqslant p < \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $\left\{\sum\limits_i \left|f(\beta_i) - f(\alpha_i)\right|^p\right\}^{1/p} < \varepsilon$ имеет место для произвольной конечной системы непересекающихся интервалов (α_i, β_i) таких, что $\left\{\sum\limits_i (\beta_i - \alpha_i)^p\right\}^{1/p} < \delta$. Очевидно, что C_1 является классом абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций. Классы C_p, $1 \leqslant p < \infty$ рассматривают как своеобразное обобщение класса C_1, а функции, которые входят в него, называют p-непрерывными. Свойство p-непрерывности является промежуточным между свойствами непрерывности ($p = \infty$) и абсолютной непрерывности ($p = 1$) [8].

Модулем непрерывности дробного порядка $1–1/p$, $1 < p < \infty$, называют величину [9]

$$\omega_{1-1/p}(f;\delta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\varkappa_p(f;\xi) :\ |\xi| \leqslant \delta\right\}, \tag{3}$$

где $|\xi| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\left\{t_i - t_{i-1} : i = \overline{1,n}\right\}$. Отметим [10, с.851], что при $p = \infty$ величина (3) совпадает с обычным модулем непрерывности $\omega(f)$ функции $f \in C$.

Лав [6] показал, что класс C_p, $1 \leqslant p < \infty$, совпадает с классом таких функций $f \in V_p$, для которых выполняется условие $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f;\delta) = 0$.

3. Исследования, связанные с наилучшим односторонним приближением функций, были начаты в работах Г.Фройда [3] и Т.Ганелиуса [11]. Проблемой односторонних приближений тригонометрическими, алгебраическими полиномами и сплайнами в разное время занимались Н.П.Корнейчук, В.Г.Доронин, А.А.Лигун, В.Ф.Бабенко и многие другие. Некоторые из полученных в этом направлении результатов содержатся в монографии [12]. Однако нам неизвестны работы, в которых бы рассматривались вопросы одностороннего приближения функций подпространством полиномов, построенных по системе Хаара. Отметим, однако, что в работе [13] исследовался вопрос об одностороннем приближении функций кусочно-постоянными функциями определенного вида.

В связи с задачами теории приближений модули непрерывности (3) впервые подробно изучались А.П.Терехиным [9]. Он, в частности, установил прямые и обратные теоремы аппроксимации тригонометрическими полиномами в пространстве C_p. Дальнейшие исследования в этом направлении продолжил С.С.Волосивец [14], который уточнил некоторые результаты, полученные в [9]. Он также исследовал вопросы приближения функций ограниченной p-вариации полиномами, построенными по системам Хаара и Уолша [15]. В работе авторов [16] в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, было получено точное неравенство, которое связывает наилучшее приближение функции $f \in C_p$ подпространством полиномов Хаара и дробный модуль непрерывности (3). Также на классе KV_p, $1 \leqslant p < \infty$, вычислена точная оценка верхней грани наилучшего приближения в L_p полиномами Хаара. Отметим также, что классы KV_1 ранее изучались и Н.П.Хорошко [17].

4. Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для произвольного модуля непрерывности* ω*, функции* $\varphi \in \Phi$ *и произвольного* $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, 2^m}$ *имеют место равенства*

$$\widehat{E}_n^{\pm}(H_\omega)_{\varphi(L)} = 2k \int_0^h \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t + (2^m - k)\int_0^{2h} \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t\ , \quad (4)$$

$$\widetilde{E}_n(H_\omega)_{\varphi(L)} = 2kh\varphi\big(\omega(h)\big) + (2^m - k)2h\varphi\big(\omega(2h)\big)\ . \quad (5)$$

Теорема 2. *Для любого* $1 < p < \infty$ *и* $n \in \mathbb{N}_*$ *выполняются равенства*

$$\sup_{\substack{f \in C_p \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{(n')^{1/p}\widehat{E}_n^{\pm}(f)_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(f; 1/n')} = \sup_{\substack{f \in C_p \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{(n')^{1/p}\widetilde{E}_n(f)_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(f; 1/n')} = 1\ . \quad (6)$$

Теорема 3. *Для произвольных* $n \in \mathbb{N}_*$ *и* $1 \leqslant p < \infty$ *имеют место равенства*

$$\widehat{E}_n^{\pm}(KV_p)_{L_p} = \widetilde{E}_n(KV_p)_{L_p} = K/(n')^{1/p}\ .$$

5. Доказательство теоремы 1. Покажем справедливость равенства (4) для величины $\widehat{E}_n^{+}(H_\omega)_{\varphi(L)}$. Произвольный полином $P_n \in \mathbb{P}_n$ при всех $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, совпадает с некоторой функцией, постоянной на промежутках δ_{m+1}^i, $i = \overline{1, 2k}$, и δ_m^j, $j = \overline{k+1, 2^m}$. При $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, он совпадает с функцией, постоянной на δ_{m+1}^i, $i = \overline{1, 2^{m+1}}$, [18, с. 142]. Полагая

$$\vartheta_i^{+}(f, x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) - \inf_{x \in \delta_{m+1}^i} f(x), \qquad \mu_j^{+}(f, x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) - \inf_{x \in \delta_m^j} f(x)\ ,$$

для произвольной функции $f \in H_\omega$ и любого $n \in \mathbb{N}_*$ получаем

$$\widehat{E}_n^+(f)_{\varphi(L)} = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta^i_{m+1}} \varphi(\vartheta_i^+(f,t))\mathrm{d}t + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta^j_m} \varphi(\mu_j^+(f,t))\mathrm{d}t. \quad (7)$$

Доопределив функции $\vartheta_i^+(f)$ и $\mu_j^+(f)$ соответственно на границах фиксированных множеств $\overline{\delta^i_{m+1}}$ i $\overline{\delta^j_m}$ по непрерывности, отметим, что для функции $f \in H_\omega$ найдутся точки $\xi_i \in \overline{\delta^i_{m+1}}$ i $\eta_j \in \overline{\delta^j_m}$ такие, что $\vartheta_i^+(f,\xi_i) = 0$ и $\mu_j^+(f,\eta_j) = 0$. В силу неубывающего характера функции φ на $[0,\infty)$ имеем

$$\int_{\delta^i_{m+1}} \varphi(\vartheta_i^+(f,t))\mathrm{d}t = \int_{(i-1)h}^{\xi_i} \varphi\big(f(t)-f(\xi_i)\big)\mathrm{d}t + \int_{\xi_i}^{ih} \varphi\big(f(t)-f(\xi_i)\big)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\xi_i-(i-1)h} \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t + \int_0^{ih-\xi_i} \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^h \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t. \quad (8)$$

Далее, на основе соотношений, построенных по аналогии с (8), получаем

$$\int_{\delta^j_m} \varphi(\mu_j^+(f,t))\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2h} \varphi(\omega(t))\mathrm{d}t\ . \quad (9)$$

Учитывая (7)–(9), можем записать оценку сверху

$$\widehat{E}_n^+(H_\omega)_{\varphi(L)} \leqslant 2k \int_0^h \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t + (2^m - k) \int_0^{2h} \varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t\ . \quad (10)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\mathcal{K}(\omega,t) \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \lambda(\omega;(i-1)2h, i2h;t)\ , \text{ если } (i-1)2h \leqslant t \leqslant i2h,\ i = \overline{1,k}; \\ \lambda(\omega;(s-2)2h, s2h;t), \text{ если } (s-2)2h \leqslant t \leqslant s2h, \\ \qquad\qquad s = (k+2j), j = \overline{1,[\frac{2^m-k}{2}]};\ \frac{2^m-k}{2} \geqslant 1\ ; \\ \omega(t+2h-1)\ , \text{ если } k \text{ нечетное и } 1-2h \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$\lambda(\omega;a,b;t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\begin{cases}\omega(t-a) & \text{, если } a\leqslant t\leqslant (a+b)/2\ ,\\ \omega(b-t) & \text{, если } (a+b)/2\leqslant t\leqslant b\ ,\end{cases}$$

$[a]$ — целая часть числа $a\in\mathbb{R}$. Нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{K}(\omega)\in H_\omega$ для произвольного модуля непрерывности ω и что $g_0^+\big(\mathcal{K}(\omega),t\big)\equiv 0$ $\forall t\in[0,1]$ является полиномом наилучшего одностороннего приближения снизу n-го порядка для функции $\mathcal{K}(\omega)$. Для произвольного $n\in\mathbb{N}_*$ после несложных вычислений имеем

$$\widehat{E}_n^+(H_\omega)_{\varphi(L)}\geqslant \widehat{E}_n^+\big(\mathcal{K}(\omega)\big)_{\varphi(L)}=$$

$$=2k\int_0^h\varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t+(2^m-k)\int_0^{2h}\varphi\big(\omega(t)\big)\mathrm{d}t\ .$$

Из оценки сверху (10) и последнего соотношения следует справедливость равенства (4) для величины $\widehat{E}_n^+(H_\omega)_{\varphi(L)}$.

Справедливость равенства (4) для величины $\widehat{E}_n^-(H_\omega)_{\varphi(L)}$ проверяется при помощи соображений, аналогичных приведенным выше.

Рассмотрим функции

$$\vartheta_i^-(f,x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sup_{x\in\delta_{m+1}^i}f(x)-f(x),\qquad \mu_j^-(f,x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\sup_{x\in\delta_m^j}f(x)-f(x)\ .$$

Для произвольной функции $f\in H_\omega$ запишем

$$\widetilde{E}_n(f)_{\varphi(L)}=\sum_{i=1}^{2k}\int_{\delta_{m+1}^i}\varphi\big(\vartheta_i^-(f,t)+\vartheta_i^+(f,t)\big)\mathrm{d}t+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{2^m}\int_{\delta_m^j}\varphi\big(\mu_j^-(f,t)+\mu_j^+(f,t)\big)\mathrm{d}t\ . \qquad (11)$$

Зафиксировав множества $\overline{\delta^i_{m+1}}$ и $\overline{\delta^j_m}$, доопределим по непрерывности функции $\vartheta^-_i(f)$, $\vartheta^+_i(f)$ и $\mu^-_j(f)$, $\mu^+_j(f)$ соответственно на границе этих множеств. Для непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции f найдутся такие точки $\alpha_i \in \overline{\delta^i_{m+1}}$ и $\beta_j \in \overline{\delta^j_m}$, что $\vartheta^-_i(f,\alpha_i)=0$ и $\mu^-_j(f,\beta_j)=0$. Тогда для $f\in H_\omega$ имеем

$$\int_{\delta^i_{m+1}} \varphi\big(\vartheta^-_i(f,t)+\vartheta^+_i(f,t)\big)\mathrm{d}t=\int_{\delta^i_{m+1}} \varphi\big(f(\alpha_i)-f(\xi_i)\big)\mathrm{d}t\leqslant h\varphi\big(\omega(h)\big). \tag{12}$$

Используя аналогичные соображения получаем

$$\int_{\delta^i_{m+1}} \varphi\big(\mu^-_j(f,t)+\mu^+_j(f,t)\big)\mathrm{d}t \leqslant 2h\varphi\big(\omega(2h)\big)\ . \tag{13}$$

Из (12)–(13) и (11) следует оценка сверху

$$\widetilde{E}_n(H_\omega)_{\varphi(L)} \leqslant 2kh\varphi\big(\omega(h)\big) + (2^m-k)2h\varphi\big(\omega(2h)\big)\ .$$

Для получения оценки снизу величины $\widetilde{E}_n(H_\omega)_{\varphi(L)}$ рассмотрим функцию $g^-_0\big(\mathcal{K}(\omega),t\big) \overset{\mathrm{df}}{=} \big\{\omega(h),$ если $0\leqslant t\leqslant 2kh;$ $\omega(2h),$ если $2kh<t\leqslant 1\big\}$. Она почти всюду совпадает с полиномом Хаара порядка $n=2^m+k,$ $m\in\mathbb{Z}_+,$ $k=\overline{1,2^m}$, и удовлетворяет неравенству $g^-_0\big(\mathcal{K}(\omega),t\big)\geqslant \mathcal{K}(\omega,t)$ $\forall\, t\in[0,1]$. Тогда

$$\widetilde{E}_n(H_\omega)_{\varphi(L)}\geqslant \widetilde{E}_n(\mathcal{K}(\omega))_{\varphi(L)}=\int_0^1 \varphi\big(g^-_0\big(\mathcal{K}(\omega),t\big)-g^+_0\big(\mathcal{K}(\omega),t\big)\big)\mathrm{d}t=$$
$$= 2kh\varphi\big(\omega(h)\big) + (2^m-k)2h\varphi\big(\omega(2h)\big).$$

Сравнив данное соотношение с полученной выше оценкой сверху, получим равенство (5). Теорема 1 доказана.

Если $\varphi(x)=|x|^p,$ $0<p<\infty$, то из (4)–(5) вытекает

$$\widehat{E}^\pm_n(H_\omega)_{L_p}=\Big\{2k\int_0^h \omega^p(t)\mathrm{d}t + (2^m-k)\int_0^{2h}\omega^p(t)\mathrm{d}t\Big\}^{1/p}\ ,$$
$$\widetilde{E}_n(H_\omega)_{L_p}=\Big\{2kh\omega^p(h) + (2^m-k)2h\omega^p(2h)\Big\}^{1/p}\ .$$

Осуществив в этих равенствах граничный переход при $p \to \infty$, получим утверждение.

Следствие 1. *Каким бы ни был модуль непрерывности ω, для произвольных $n \in \mathbb{N}_*$ имеют место следующие равенства*

$$\widehat{E}_n^{\pm}(H_\omega)_C = \widetilde{E}_n(H_\omega)_C = \omega(1/n') \ .$$

6. Доказательство теоремы 2. Положив

$$\begin{gathered} D_m^k(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{f(x)\colon\ x \in \delta_m^k\right\};\ d_m^k(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\left\{f(x)\colon\ x \in \delta_m^k\right\}; \\ C_m^k(f) = \big(D_m^k(f) + d_m^k(f)\big)/2. \end{gathered} \tag{14}$$

и учитывая кусочно-постоянный характер полиномов Хаара $P_n \in \mathbb{P}_n$ [18, с.142], для произвольной функции $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, и произвольного $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, 2^m - 1}$, можем записать

$$\big(\widehat{E}_n^{+}(f)_{L_p}\big)^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(t) - d_{m+1}^i(f)|^p \mathrm{d}t + \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^j} |f(t) - d_m^j(f)|^p \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant 2h\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k} |D_{m+1}^i(f) - d_{m+1}^i(f)|^p + \sum_{j=k+1}^{2^m} |D_m^j(f) - d_m^j(f)|^p\Big\}. \tag{15}$$

Учитывая определение модуля непрерывности дробного порядка (3), для произвольной функции $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, из (15) получаем

$$\widehat{E}_n^{+}(f)_{L_p} \leqslant (2h)^{1/p} \omega_{1-1/p}(f; 2h) \ . \tag{16}$$

Для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\Big(\widehat{E}_n^{+}(f)_{L_p}\Big)^p = \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \int_{\delta_{m+1}^i} |f(t) - d_{m+1}^i(f)|^p \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{i=1}^{2^{m+1}} |D^i_{m+1}(f) - d^i_{m+1}(f)|^p. \tag{17}$$

Кроме того, для произвольной функции $f \in C_p,\ 1 < p < \infty$, из (17) следует

$$\widehat{E}^+_n(f)_{L_p} \leqslant (h)^{1/p} \omega_{1-1/p}(f; h) \ . \tag{18}$$

Наконец, в силу (16), (18) и обозначения числа n', для $1<p<\infty$ получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f \in C_p \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{(n')^{1/p} \widehat{E}^+_n(f)_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(f; 1/n')} \leqslant 1 \ , \tag{19}$$

где $n \in \mathbb{N}_*$ — произвольное число.

Для получения оценки снизу рассмотрим множество функций

$$g_\varepsilon(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} K/2 \ , & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1 - 2\varepsilon, \\ K/2 - K(t - 1 + 2\varepsilon)/\varepsilon, & \text{если } 1 - 2\varepsilon \leqslant t \leqslant 1 - \varepsilon, \\ -K/2 \ , & \text{если } 1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant 1 \ , \end{cases}$$

определяемое параметром $0 < \varepsilon < 1/(4n')$. Несложно убедиться в том, что $g_\varepsilon \in C_p,\ 1 < p < \infty$, при любом $\varepsilon \in \big(0, 1/(4n')\big)$, а также в том, что $\omega_{1-1/p}(g_\varepsilon; 1/n') = K$. Нетрудно убедиться и в том, что полином

$$\widehat{p}_n(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} K/2 \ , & \text{если } 0 \leqslant t < 1 - 1/n' \ , \\ 0 \ , & \text{если } t = 1/n' \ , \\ -K/2 \ , & \text{если } 1 - 1/n' < t \leqslant 1 \end{cases}$$

осуществляет наилучшее одностороннее приближение снизу функции g_ε в метрике пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$. Поскольку

$$\|g_\varepsilon - \widehat{p}_n\|^p_{L_p} = \int_{1-1/n'}^1 |g_\varepsilon - \widehat{p}_n|^p \mathrm{d}t = K^p \Big(\frac{1}{n'} - \frac{2p+1}{p+1}\, \varepsilon \Big), \ 1 \leqslant p < \infty,$$

то, используя неравенство из [16, с.33]

$$(a-b)^{\rho} \geqslant a^{\rho} - b^{\rho} \quad \forall a \geqslant b \geqslant 0,\ 0 < \rho \leqslant 1, \tag{20}$$

для $1 < p < \infty$ получаем

$$\frac{(n')^{1/p}\widehat{E}_n^{+}(g_{\varepsilon})_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(g_{\varepsilon}; 1/n')} = \frac{(n')^{1/p}\|g_{\varepsilon} - \widehat{p}_n\|_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(g_{\varepsilon}; 1/n')} \geqslant 1 - \left(\frac{2p+1}{p+1} n'\varepsilon\right)^{1/p}.$$

В силу определения точной верхней границы множества, неравенства (19) и последнего соотношения убеждаемся в справедливости равенства (6) для величины $\widehat{E}_n^{+}(f)_{L_p}$.

Чтобы получить соотношение (6) для величины $\widehat{E}_n^{-}(f)_{L_p}$ нужно воспользоваться аналогичными рассуждениями.

Учитывая определение дробного модуля непрерывности (3) и обозначения (14), для $n=2^m+k$, $m\in\mathbb{N}$, $k=\overline{1, 2^m-1}$, и $f\in C_p$, $1<p<\infty$, записываем

$$\widetilde{E}_n^{p}(f)_{L_p} = \sum_{i=1}^{2k} \int_{\delta_{m+1}^{i}} |D_{m+1}^{i}(f) - d_{m+1}^{i}(f)|^p \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{2^m} \int_{\delta_m^{j}} |D_m^{j}(f) - d_m^{j}(f)|^p \mathrm{d}t \leqslant 2h\omega_{1-1/p}^{p}(f; 2h)\ . \tag{21}$$

Для $n = 2^{m+1}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\widetilde{E}_n^{p}(f)_{L_p} = \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \int_{\delta_{m+1}^{i}} |D_{m+1}^{i}(f) - d_{m+1}^{i}(f)|^p \mathrm{d}t \leqslant h\omega_{1-1/p}^{p}(f; h). \tag{22}$$

Тогда из (21)–(22) для любого $n \in \mathbb{N}_*$ вытекает неравенство:

$$\sup_{\substack{f\in C_p\\ f\not\equiv \mathrm{const}}} \frac{(n')^{1/p}\widetilde{E}_n(f)_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(f; 1/n')} \leqslant 1\ . \tag{23}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим множество функций f_ε, определяемых параметром ε $(0 < \varepsilon < 1/(4n'))$:

$$f_\varepsilon(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} K/2\ , & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2n'} - \varepsilon, \\ \dfrac{K}{2} - \dfrac{K}{2\varepsilon}\Big[t + \dfrac{1}{2n'} + \varepsilon - 1)\Big], & \text{если } 1 - \frac{1}{2n'} - \varepsilon \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2n'} + \varepsilon, \\ -K/2\ , & \text{если } 1 - \frac{1}{2n'} + \varepsilon \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{24}$$

где $K > 0$. Несложно проверить, что для любого фиксированного $0 < \varepsilon < 1/(4n')$ и функции $f_\varepsilon \in C_p$, $1 < p < \infty$, определенной соотношением (24), имеет место равенство

$$\frac{(n')^{1/p}\widetilde{E}_n(f_\varepsilon)_{L_p}}{\omega_{1-1/p}(f_\varepsilon; 1/n')} = 1\ .$$

Вторая часть равенства (6) вытекает из (23) и последнего равенства. Теорема 2 доказана.

7. Доказательство теоремы 3. Из (15) и (17) для $1 \leqslant p < \infty$ и $n \in \mathbb{N}_*$ имеем оценку сверху

$$\widehat{E}_n^+(KV_p)_{L_p} \leqslant K/(n')^{1/p}\ .$$

Несложно показать, что для принадлежащей классу KV_p функции

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{K/2,\ \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1 - \varepsilon; -K/2,\ \text{если } 1 - \varepsilon < t \leqslant 1\},$$

где $0 < \varepsilon < 1/(2n')$, полином наилучшего одностороннего приближения снизу почти всюду совпадает с функцией $g_n^+(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$ $\stackrel{\mathrm{df}}{=} \{K/2,$ если $0 \leqslant t \leqslant 1 - 1/n'$; $-K/2$, если $1 - 1/n' < t \leqslant 1\}$. Используя неравенство (20), получаем

$$\widehat{E}_n^+(\mathcal{F}_\varepsilon)_{L_p} \geqslant K/(n')^{1/p} - \varepsilon^{1/p}K\ .$$

Отсюда вытекает, что для любых фиксированных чисел $n \in \mathbb{N}_*$, $1 \leqslant p < \infty$ и для произвольного достаточно малого $\delta > 0$ существует функция $\mathcal{F}_{\varepsilon_*} \in KV_p$, $0 < \varepsilon_* < \delta^p/K$, такая, что

$$K/(n')^{1/p} \geqslant \widehat{E}_n^+(KV_p)_{L_p} \geqslant \widehat{E}_n^+(\mathcal{F}_{\varepsilon_*})_{L_p} \geqslant K/(n')^{1/p} - \delta \ .$$

Далее, используя определение точной верхней границы множества, имеем равенство

$$\widehat{E}_n^+(KV_p)_{L_p} = K/(n')^{1/p} \ .$$

Оценку $\widehat{E}_n^-(KV_p)_{L_p} = K/(n')^{1/p}$ получим, проведя аналогичные соображения.

Из соотношений (21) и (22) следует

$$\widetilde{E}_n(KV_p)_{L_p} \leqslant K/(n')^{1/p} \ . \tag{25}$$

Для принадлежащей классу KV_p, $1 \leqslant p < \infty$, функции

$$\mathcal{F}(t) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} K/2 \ , & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1 - 1/(2n'), \\ -K/2 \ , & \text{если } 1 - 1/(2n') < t \leqslant 1, \end{cases}$$

и произвольных $n \in \mathbb{N}_*$ имеем

$$\widetilde{E}_n(KV_p)_{L_p} \geqslant \widetilde{E}_n(\mathcal{F})_{L_p} = K/(n')^{1/p} \ .$$

Сопоставив (25) и последнее соотношение, получим

$$\widetilde{E}_n(KV_p)_{L_p} = K/(n')^{1/p} \ .$$

Теорема 3 полностью доказана.

8. Отметим, что используя приведенные выше рассуждения можно получить своеобразный аналог теоремы 1 при рассмотрении вопросов одностороннего приближения классов функций многих переменных полиномами, построенными по системе Хаара. Результаты, полученые в данном направлении, содержатся в [19].

1. *Голубов Б.И.* О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 6. — С. 1271–1296.

2. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М: Наука, 1987. — 424 с.

3. *Freud G.* Über cinseitige Approximation durch Polynome, I // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1955. — V. 16, № 1-2. — P. 12–28.

4. *Ульянов П.Л.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи матем. наук. — 1972. — Т. 27, № 2. — С. 3–52.

5. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Mass. Inst. of Technology. — 1924. — V. 3. — P. 73–94.

6. *Love E.R.* A generalization of absolute continuity // J. London Math. Soc. — 1951. — V. 26, № 1. — P. 1–13.

7. *Young L.C.* An inequality of the Hölder type, connected with Stiltjes integration // Acta Math. — 1936. — V. 67, № 3-4. — P. 251–282.

8. *Терехин А.П.* Функции ограниченной p-вариации с данным порядком модуля непрерывности // Матем. заметки. — 1972. — Т. 12, № 5. — С. 523–530.

9. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Матем. — 1965. – № 2. — С. 171–187.

10. *Голубов Б.И.* О функциях ограниченной p-вариации // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1968. — Т. 32, № 4. — С. 837–858.

11. *Ganelius T.* On the sided approximation by trigonometric polynomials // Math. Scand. — 1956. — № 4. — P. 247–258.

12. *Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.* Аппроксимация с ограничениями. — Киев: Наукова думка, 1982.

13. *Доронин В.Г., Лигун А.А.* К вопросу о наилучшем одностороннем приближении некоторых классов непрерывных функций // Исследования по соврем. пробл. суммирования и приближ. функций и их приложения. — Днепропетровск: Днепропетров. гос. ун-т, 1974. — С. 42–49.

14. *Волосивец С.С.* Особенности прямых и обратных теорем приближения p-абсолютно непрерывных функций // Вестник Моск. гос. ун-та. Сер.1. Матем. Мех. — 1998. — № 5. — С. 55–56.

15. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p-вариации полиномами по системам Хаара и Уолша // Матем. заметки. — 1993. — Т. 53, № 6. — С. 11–21.
16. *Вакарчук С.Б., Щитов А.Н.* О наилучшем приближении функций ограниченной p-вариации полиномами, построенными по системе Хаара // Вестник Днепропетров. ун-та. Математика. — 2004. — № 11. — С. 28–34.
17. *Хорошко Н.П.* О наилучшем приближении в метрике L некоторых классов функций полиномами по системе Хаара // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 1. — С. 47–53.
18. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. — М.: Физматгиз, 1958. — 507 с.
19. *Щитов А.Н.* Экстремальные задачи полиномиальной аппроксимации функций одной и нескольких действительных переменных: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Днепропетровск, 2005. — 145 с.