МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 29, № 6 (1981)

МОДУЛИ НАД НАСЛЕДСТВЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ

Ю. А. Дрозд

Цель настоящей заметки — перенести классические результаты о модулях над областями главных идеалов [1], [2] на случай наследственных порядков. Под порядком мы будем понимать здесь двусторонний порядок Λ в полупростом артиновом кольце $\tilde{\Lambda}$ (или, что то же, полупервичное двустороннее кольцо Голди [3]). Известно, что если такой порядок наследственен справа (слева), то он и нетеров справа (слева): это вытекает, например, из [4, предложение VII.3.1]). В дальнейшем *наследственным порядком* мы будет называть порядок, наследственный с обеих сторон (и потому двусторонне нетеров). Для любого правого (левого) Λ-модуля A обозначим $\tilde{A} = A \otimes \tilde{\Lambda}$ (соответственно, $\tilde{A} = \tilde{\Lambda} \otimes_\Lambda A$) и δ_A — естественное вложение $A \to \tilde{A}$.

Конечнопорожденный Λ-модуль A назовем *модулем без кручения*, если δ_A — мономорфизм, и *периодическим*, если $\tilde{A} = 0$.

Легко видеть, что модули без кручения — это в точности подмодули свободных Λ-модулей, так что если Λ наследственен, то все они проективны [4]. Обозначим $T = \tilde{\Lambda}/\Lambda$; $A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$; $A^\wedge = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, T)$. Нам понадобится следующий известный результат (см., например, [2, глава 5]).

Предложение 1. *Если Λ — наследственный порядок, то функтор * осуществляет двойственность (т. е. антиэквивалентность) категорий правых и левых Λ-модулей без кручения, а функтор $^\wedge$ — двойственность категорий правых и левых периодических Λ-модулей. При* *этом, если f — гомоморфизм модулей без кручения с периодическим коядром, то* $\mathrm{Coker}(f^*) \simeq (\mathrm{Coker}\, f)^{\wedge}$.

Следствие. *Периодические модули над наследственным порядком имеют конечную длину.*

Модуль без кручения A назовем неприводимым, если $\tilde{A}$ — простой $\tilde{\Lambda}$-модуль, или, что то же, для любого ненулевого подмодуля $A' \subset A$ фактор-модуль A/A' периодичен. Очевидно, если f — ненулевой гомоморфизм неприводимых модулей, то $\mathrm{Coker}\, f$ периодичен. В частности, если Λ наследственен, то $\mathrm{Coker}\, f$ имеет конечную длину, которую мы обозначим $l(f)$, считая, что $l(0) = \infty$. Далее для краткости будем обозначать $[f] = \mathrm{Coker}\, f$. Из предложения 1 вытекает, что $l(f) = l(f^*)$.

Пусть f: $A \to B$ и g: $C \to D$ — гомоморфизмы неприводимых Λ-модулей. Назовем f *полным делителем* g и будем писать $f \| g$, если для любого гомоморфизма α: $A \to C$ найдется β: $B \to D$ такой, что $g\alpha = \beta f$ и для любого φ: $D \to B$ найдется ψ: $C \to A$ такой, что $\varphi g = f\psi$. Заметим, что если Λ — область целостности, а $A = B = C = D = \Lambda$ (тогда f и g можно рассматривать как элементы из Λ), то это понятие совпадает с одноименным понятием, определенным в [2, глава 8].

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий конечнопорожденный модуль над наследственным порядком изоморфен прямой сумме вида* $[f_1] \oplus [f_2] \oplus \ldots \oplus [f_n]$, *где f_i — гомоморфизм неприводимых Λ-модулей, причем $f_i \| f_j$ и $l(f_i) \leqslant l(f_j)$ при $i < j$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Λ — наследственный порядок, f: $A \to B$ — гомоморфизм Λ-модулей без кручения. Тогда существуют такие разложения $A = \oplus_{j=1}^{n} A_j$ и $B = \oplus_{i=1}^{m} B_i$, где все A_j и B_i неприводимы, что $f(A_i) \subset B_i$ (в частности, $f(A_i) = 0$ при $i > m$) и если обозначить f_i гомоморфизм $A_i \to B_i$, индуцированный f, то $f_i \| f_j$ и $l(f_i) \leqslant l(f_j)$ при $i < j$.*

Заметим, что поскольку всякий конечнопорожденный Λ-модуль изоморфен коядру гомоморфизма проективных конечнопорожденных модулей, то теорема 1 является следствием теоремы 2. Теорему 2 мы выведем из следующей леммы.

ЛЕММА. *Пусть Λ — наследственный порядок, A_1, A_2 и B — неприводимые Λ-модули, $A = A_1 \oplus A_2$, f: $A \to B$*

и g: $B \to A$ *— гомоморфизмы,* f_i *— ограничение* f *на* A_i, $g_i = \pi_i g$, *где* π_i *— проекция* A *на* A_i. *Если уравнение* $f_2 = f_1 x$ $(g_2 = y g_1)$ *неразрешимо, то существует такое разложение* $A = A_1' \oplus A_2'$, *что если обозначить* f_i' *ограничение* f *на* A_i' $(g_i' = \pi_i' g$, *где* π_i' *— проекция* A *на* $A_i')$, *то* $l(f_1') < l(f_1)$ *(соответственно,* $l(g_1') < l(g_1)$*).*

Доказательство. Если $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Im} f_1$, то, поскольку A_2 проективен, уравнение $f_2 = f_1 x$ разрешимо. Пусть $\operatorname{Im} f_2 \not\subset \operatorname{Im} f_1$. Тогда

$$l(B/\operatorname{Im} f) < l(B/\operatorname{Im} f_1) = l(f_1).$$

Но $\operatorname{Im} f$ проективен, значит, эпиморфизм $A \to \operatorname{Im} f$ расщепляем, т. е. $A = A_1' \oplus A_2'$, причем ограничение f на A_1' индуцирует изоморфизм $A_1' \simeq \operatorname{Im} f$, а тогда $l(f_1') < l(f_1)$, что доказывает первое утверждение. Для доказательства второго достаточно заметить, что переход от g к g^* сводит его к первому.

Теорема 2 выводится из леммы несложной индукцией по длине $\tilde{\Lambda}$-модулей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ просты, то утверждение тривиально). Именно, ввиду наследственности Λ, A и B разлагаются в прямую сумму неприводимых модулей: $A = \oplus_{j=1}^m A_j$, $B = \oplus_{i=1}^m B_i$. Тогда f задается матрицей

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A_j, B_i)$. Выберем среди всех разложений такое, чтобы $l(f_{11})$ было минимальным. Тогда из леммы следует, что $f_{1j} = f_{11} x_j$, а $f_{i1} = y_i f_{11}$ для некоторых x_j: $A_j \to A_1$ и y_i: $B_1 \to B_i$ и потому можно считать, что $f_{1j} = 0$ и $f_{i1} = 0$, т. е. матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & X \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Применяя индукционное предположение, можно считать, что X — диагональная матрица: $X = \operatorname{diag}(f_2, f_3, \dots)$, причем $f_i \parallel f_j$ и $l(f_i) \leqslant l(f_j)$ при $1 < i \leqslant j$. Из минимальности $l(f_1)$ сразу следует, что $l(f_1) \leqslant l(f_i)$. Далее, если f_1

не есть полный делитель f_i для некоторого i, то, например, существует α: $A_1 \to A_i$ такой, что уравнение $\alpha f_i = f_1 x$ неразрешимо. Но тогда матрицу f можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} f_1 \ldots \alpha f_1 \ldots \\ * \end{pmatrix}$$

и воспользовавшись леммой, можно уменьшить $l(f_1)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Если наследственный порядок Λ полусовершенен [5], то теорему 1 можно существенно уточнить. Именно в этом случае есть лишь конечное число неизоморфных неприводимых Λ-модулей (все они являются прямыми слагаемыми Λ): $P_1, \ldots, P_n$. Далее, всякий подмодуль $\Lambda \subset P_i$ неразложим и проективен, следовательно, содержит единственный максимальный подмодуль. Поэтому структура подмодулей в каждом P_i является цепью. В частности, у всякого P_i есть ровно один фактор-модуль A_{ij} длины j (включая случай $j = \infty$, тогда $A_{ij} = P_i$) и получаем такое

Следствие. *Всякий конечнопорожденный модуль над полусовершенным наследственным порядком однозначно разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных* A_{ij} $(i = 1, \ldots, n;\ 1 \leqslant j \leqslant \infty)$.

Замечание. Для односторонне наследственных порядков теоремы 1 и 2 неверны. Например, если $\Lambda = K[x; -\alpha, \delta]$ — кольцо косых многочленов над полем [2], причем α не автоморфизм, то Λ — область главных правых идеалов, но существуют неразложимые нециклические периодические Λ-модули (если $[K: K^\alpha] \geqslant 4$, то существуют даже неразложимые периодические Λ-модули со сколь угодно большим числом образующих).

Киевский государственный университет

Поступило 29.III.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Джекобсон Н., Теория колец, М., ИЛ, 1947.
[2] Кон П., Свободные кольца и их связи, М., «Мир», 1975.
[3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, М., «Мир», 1972.
[4] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., ИЛ, 1960.
[5] Ламбек И., Кольца и модули, М., «Мир», 1971.