Завдання 1

Виконати до 15 вересня

Вправа 1. Перевірте, що комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "2"] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

де π — природна проекція, визначає квізоморфізм між обмеженими комплексами першого й другого рядків. Доведіть також, що єдиний морфізм з другого комплексу в перший — нульовий.

Вправа 2. (1) Доведіть, що послідовність $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ є точною тоді й лише тоді, коли f є зануренням A в B, образ якого — $\operatorname{Ker} g$.

У цьому випадку кажуть, що f — *ядро* g.

(2) Доведіть, що послідовність $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ є точною тоді й лише тоді, коли g — епік й індкує ізоморфізм $\operatorname{Coker} f \to C$.

У цьому випадку кажуть, що g — *коядро* f.

Вправа 3. Нехай дано комутативну діаграму з точними стовпчиками

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Доведіть, що якщо два рядки в ній є точними, а $\beta\alpha = 0$, то й третій рядок є точним. (Якщо точним є середній рядок, автоматично $\beta\alpha = 0$).

Порада: Доведіть, що третій рядок є комплексом і використайте теорему про довгу точну послідовність когомологій.

Вправа 4. (1) Доведіть, що якщо дано діаграму з точними рядками

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_0 \arrow[r] & 0 \\
B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

то існує єдиний морфізм $\alpha_0 : A_0 \to B_0$, який робить комутативною всю діаграму

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & 0 \\
B_0 \arrow[r, "g_2"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Якщо α_1 епік, а α_2 — ізоморфізм, то й α_0 — ізоморфізм.

(2) Сформулюйте й доведіть аналогічний результат для діаграми

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^0 \arrow[r, "f^0"] & A^1 \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "\alpha^1"] & A^2 \arrow[d, "\alpha^2"] \\
0 \arrow[r] & B^0 \arrow[r, "g^0"] & B^1 \arrow[r, "g^1"] & B^2
\end{tikzcd}$$

Завдання 2

Виконати до 22 вересня

Вправа 1. Доведіть, що відношення гомотопності $\sim$ є відношенням еквівалентності (як для морфізмів, так і для комплексів).

Вправа 2. Побудуйте приклади

(1) гомологічних морфізмів, які не є гомотопічними;
(2) ациклічного комплексу, який не є гомотопічно тривіальним.

Вправа 3. Доведіть, що для комплексу $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ наступні умови рівносильні:

(1) Цей комплекс є гомотопічно тривіальним.
(2) Він є ациклічним й існує морфізм $\alpha : B \to A$ такий, що $\alpha f = 1_A$.
(3) Він є ациклічним й існує морфізм $\beta : C \to B$ такий, що $g\beta = 1_C$.
(4) $B = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

Порада: Мабуть, найкраще доводити, що (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) і (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

Вправа 4. (1) Нехай $0 \to B \xrightarrow{g} Cf \xrightarrow{h} A[-1] \to 0$ — точна послідовність, яка виникає з конусу Cf морфізму комплексів $f : A \to B$,

$$\dots H^n(A) \xrightarrow{\delta^n} H^n(B) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C) \xrightarrow{H^n(h)} H^{n+1}(A) \to \dots$$

відповідна довга точна послідовність когомологій. Доведіть, що відображення δ^n в ній збігається з $H^n(f)$.

(2) Виведіть звідси, що f є квізоморфізмом тоді й лише тоді, коли Cf ациклічний.

Вправа 5. Нехай $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} Cf \xrightarrow{h} A[1]$ — конічна послідовність морфізму f, $B \xrightarrow{g} Cf \xrightarrow{q} Cg \xrightarrow{r} B[1]$ — конічна послідовність морфізму g, $\alpha^n : A[1]^n = A^{n+1} \to Cg^n = B^{n+1} \oplus A^{n+1} \oplus B^n$ та $\beta : Cg^n \to A[1]^n$ задані матрицями

$$\alpha^n = \begin{pmatrix} -f \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \beta^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведіть, що $\alpha^{\cdot} = \{\alpha^n\}$ — морфізм $A[1] \to Cg$, $\beta^{\cdot} = \{\beta^n\}$ — морфізм $Cg \to A[1]$, причому $\alpha h \sim q$ і $f[1]\beta \sim -r$.

Вправа 6. Нехай A — обмежений комплекс скінченновимірних векторних просторів. Його *характеристикою Ойлера* зветься сума $\chi(A) = \sum_n (-1)^n \dim A^n$.

(1) Довести, що $\chi(A) = \sum_n (-1)^n \dim H^n(A)$.

(2) Довести, що якщо $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точна послідовність таких комплексів, то $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$.

Завдання 3

Виконати до 29 вересня

Вправа 1. (1) Доведіть, що добуток модулів $\prod_{i\in\mathfrak{I}} M_i$ є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли кожен модуль M_i є ін'єктивним.

(2) Доведіть, що кодобуток (пряма сума) модулів $\coprod_{i\in\mathfrak{I}} M_i$ є проективним тоді й лише тоді, коли кожен модуль M_i є проективним.

Вправа 2. Доведіть, що модуль M є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли кожен монік $\alpha : M \to N$ має лівий обернений $\alpha' : N \to M$.

Вправа 3. Нехай $\boldsymbol{R}$ — *область головних лівих ідеалів*, тобто не має дільників нуля, а кожен лівий ідеал має вигляд $\boldsymbol{R}r$ для деякого $r \in \boldsymbol{R}$. Доведіть, що

(1) $\boldsymbol{R}$-модуль M є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли він є *подільним*, тобто для кожного $a \in M$ і кожного $r \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ існує $b \in M$, для якого $rb = a$.

(2) Якщо модуль I ін'єктивний, то й кожен його фактормодуль M/N також ін'єктивний.

Вправа 4. Нехай $M = \coprod_{i\in\mathfrak{I}} M_i$ — кодобуток (пряма сума). Доведіть, що:

(1) Якщо модуль L є скінченнопородженим, то природне відображення $\coprod_{i\in\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(L, M_i) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(L, M)$, яке переводить набір $(f_i \mid i \in \mathfrak{I})$ у морфізм f такий, що $f(a_i) = \sum_{i\in\mathfrak{I}} f_i(a_i)$, є бієктивним.

(2) Якщо кільце $\boldsymbol{R}$ *нетерове зліва*, тобто кожен його лівий ідеал є скінченнопородженим, то M є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли такими є всі модулі M_i.

Наступні вправи дають ще одну характеристику ін'єктивних модулів і показують, що для кожного модуля є «найменший» ін'єктивний модуль, який його містить.

Занурення $M \subseteq N$ називають *істотним*, якщо не існує ненульових підмодулів $N' \subset N$ таких, що $N' \cap M = 0$. Очевидно, якщо занурення $M \subseteq N$ та $N \subseteq L$ є істотними, то й занурення $M \subseteq L$ є істотним.

Вправа 5. Нехай $\{\, N_i \mid i \in \mathfrak{I} \,\}$ — ланцюг підмодулів у модулі A, тобто для кожних i, j або $N_i \subseteq N_j$, або $N_j \subseteq N_i$, M — підмодуль A, $N = \cup_{i\in\mathfrak{I}} N_i$. Доведіть, що

(1) N — підмодуль в A.

(2) Якщо $N_i \cap M = 0$ для всіх $i \in \mathfrak{I}$, то й $N \cap M = 0$.

(3) Якщо $M \subseteq N_i$ для кожного $i \in \mathfrak{I}$, причому занурення $M \subseteq N_i$ є істотним, то й занурення $M \subseteq N$ є істотним.

Вправа 6. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Модуль M є ін'єктивним.
(2) Не існує власних істотних занурень $M \subset N$.

Порада: Для доведення (2)$\Rightarrow$(1) розгляньте занурення $M \subseteq I$, де модуль I ін'єктивний, знайдіть максимальний підмодуль $A \subset I$, для якого $A \cap M = 0$, і доведіть, що $A + M = I$, тобто M — прямий додаток I. (Інакше занурення $(M + A)/A \subset I/A$ істотне, що неможливо, бо $(M + A)/A \simeq M$).

Вправа 7. Доведіть, що для кожного модуля M існує істотне занурення в ін'єктивний модуль, причому цей ін'єктивний модуль визначений однозначно з точністю до ізоморфізму.

Порада: Розгляньте якесь занурення $M \subseteq I$, де I ін'єктивний, знайдіть максимальний підмодуль $N \subseteq I$ такий, що $M \subseteq N$ і це занурення є істотним, і доведіть, що N не має власних істотних занурень.

Ін'єктивний модуль $I(M)$, для якого існує істотне занурення $M \subseteq I(M)$ зветься *ін'єктивною оболонкою* модуля M.

Завдання 4

Виконати до 13 жовтня

Вправа 1. Доведіть наступні результати про проективні резольвенти:

(1) Кожен модуль A має проективну резольвенту $p_A : P \to A$.
(2) Якщо $p_A : P_A \to A$ і $p_B : P_B \to B$ — проективні резольвенти модулів A і B, $f : A \to B$ — довільний морфізм, то існує морфізм комплексів $p_f : P_A \to P_B$ такий, що $p_B p_f = p_A f$. Цей морфізм визначений однозначно з точністю до гомотопії.
(3) Довільні дві проективні резольвенти модуля A гомотопні.

Отже, $A \mapsto P_A$ визначає функтор $\boldsymbol{R}\text{-Mod} \to \mathsf{Hot}(\boldsymbol{R}\text{-Pr})$, гомотопічну категорію комплексів проективних $\boldsymbol{R}$-модулів.

Вправа 2. Нехай $(A^\cdot, d_A^\cdot)$ — обмежений справа комплекс $\boldsymbol{R}$-модулів. Доведіть, що існує обмежений справа комплекс ін'єктивних модулів $(I^\cdot, d_I^\cdot)$ і набір морфізмів $i^n : A^n \to I^n$ такий, що для кожного n виконуються умови:

(1) Діаграма

$$\text{(D)} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^0 \arrow[r, "d_A^0"] \arrow[d, "i^0"'] & A^1 \arrow[r, "d_A^1"] \arrow[d, "i^1"'] & A^2 \arrow[r, "d_A^2"] \arrow[d, "i^2"'] & \dots \arrow[r, "d_A^{n-1}"] & A^n \arrow[d, "i^n"'] \\ 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] & I^1 \arrow[r, "d_I^1"] & I^2 \arrow[r, "d_I^2"] & \dots \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \end{tikzcd}$$

є комутативною.
(2) Індуковані відображення $H^k(A) \to H^k(I)$ при $0 \leqslant k < n$ є ізоморфізмами.
(3) Індуковане відображення $A^n/\operatorname{Im} d_A^{n-1} \to I^n/\operatorname{Im} d_I^{n-1}$ — монік.

Зокрема, $i^\cdot$ — квізоморфізм $A \to A$ (тобто, є *ін'ектиівною резольвентою* комплексу A).

Порада: Комплекс I можна будувати рекурсивно. Вважаємо, що $A^n = 0$ при $n < 0$. За i^0 можна взяти довільне занурення $A^0 \to I^0$, де I^0 — ін'єктивний модуль. Далі припустимо, що вже побудована діаграма (D). Позначимо $B = A^n/\operatorname{Im} d_A^n$, $\pi_A : A^n \to B$; $J = I^n/\operatorname{Im} d_I^n$, $\pi_I : I^n \to J$; $\alpha : B \to A^{n+1}$ — такий морфізм, що $d_A^n = \alpha\pi_A$, $j : B \to J$ — монік з умови (3). Покладемо $C = J \oplus A^{n+1}/N$, де $N = \{\, (j(b), -\alpha(b)) \mid b \in B \,\}$, $\widetilde{j} : A^{n+1} \to C$ і $\widetilde{\alpha} : J \to C$ — відображення, які переводять, відповідно, $a \in A^{n+1}$ у клас пари $(0, a)$ і $x \in J$ у клас пари $(x, 0)$. Перевірте, що $\widetilde{j}$ — монік, $\operatorname{Ker} \widetilde{\alpha} = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = H^n(A)$ і $\widetilde{j}(\operatorname{Im} d_A^n) = \operatorname{Im} \widetilde{\alpha}$. Розгляньте якесь занурення $q : C \to I^{n+1}$, де модуль I^{n+1} ін'єктивний, покладіть $d_I^n = q\widetilde{\alpha}\pi_I$, $i^{n+1} = q\widetilde{j}$ і перевірте, що в такий спосіб отримано діаграму вигляду (D) з $n+1$ членом.

Вправа 3. Сформулюйте й доведіть аналогічний результат про існування проективної резольвенти $p : P \to A$ для довільного обмеженого зліва комплексу A.

Завдання 5

Виконати до 20 жовтня

Вправа 1. (1) Доведіть, що точний функтор переводить довільну точну послідовність у точну послідовність.

Порада: Послідовність $\dots \to A^{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A^n \xrightarrow{\alpha_n} A^{n+1} \to \dots$ є точною тоді й лише тоді, коли для кожного n точною є індукована послідовність $0 \to \operatorname{Im} \alpha^{n-1} \to A^n \to \operatorname{Im} \alpha_n \to 0$.

(2) Доведіть, що якщо функтор F є точним, а $A = (A^\cdot, d^\cdot)$ — довільний комплекс, то $H^n(\mathsf{F}A) \simeq \mathsf{F}H^n(A)$, де $\mathsf{F}A = (\mathsf{F}A^\cdot, \mathsf{F}d^\cdot)$.

Вправа 2. Доведіть, що функтор F є точним зліва тоді й лише тоді, коли для кожної точної послідовності $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ точною є послідовність $0 \to \mathsf{F}A \xrightarrow{\mathsf{F}\alpha} \mathsf{F}B \xrightarrow{\mathsf{F}\beta} \mathsf{F}C$.

Порада: Розбийте цю послідовність на дві: $0 \to A \to B \to K \to 0$ і $0 \to K \to C \to C/K \to 0$, де $K = \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$.

Вправа 3. Доведіть, що послідовність $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ є точною тоді й лише тоді, коли для кожного M точною є послідовність $0 \to \operatorname{Hom}(M, A) \xrightarrow{\alpha\cdot} \operatorname{Hom}(M, B) \xrightarrow{\beta\cdot} \operatorname{Hom}(M, C)$, де $\alpha\cdot$ — множення зліва на α.

Вправа 4. Нехай $\boldsymbol{I}$ — правий ідеал кільця $\boldsymbol{R}$, A — лівий $\boldsymbol{R}$-модуль. Доведіть, що відображення $A/\boldsymbol{I}A \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I} \otimes_{\boldsymbol{R}} A$, яке переводить $a + \boldsymbol{I}A \in A/\boldsymbol{I}A$ в $a \otimes (1 + \boldsymbol{I}) \in A \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ коректно визначене й є ізоморфізмом. Зокрема, $\boldsymbol{R} \otimes_{\boldsymbol{R}} A \simeq A$.

Вправа 5. Перевірте, що послідовність абелевих груп ($\mathbb{Z}$-модулів) $0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2 \to 0$, де α — множення на 2, а β — проекція, є точною, але жодна з індукованих нею послідовностей

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \to 0$$

точною не є.

Завдання 6

Виконати до 27 жовтня

Вправа 1. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Функтор F є точним.
(2) F є точним справа і $\mathsf{L}_1\mathsf{F} = 0$.
(3) $\mathsf{L}_n\mathsf{F} = 0$ для всіх $n > 0$, а $\mathsf{L}_0\mathsf{F} = \mathsf{F}$.

Вправа 2. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Функтор F є точним справа.
(2) $\mathsf{F} \simeq \mathsf{L}_0\mathsf{F}$.

Вправа 3. (1) Побудуйте морфізм $F \xrightarrow{\gamma} \mathsf{R}^0\mathsf{F}$ такий, що довільний морфізм $F \xrightarrow{\alpha} F'$, де функтор F' точний зліва, розкладається як $\alpha = \beta\gamma$ для деякого $\beta : \mathsf{R}^0\mathsf{F} \to \mathsf{F}'$.
(2) Сформулюйте й доведіть аналогічне твердження для $\mathsf{L}_0\mathsf{F}$. (Зверніть увагу на напрямки відображень).

Вправа 4. Нехай $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точна послідовність модулів. Доведіть, що:

(1) Якщо модуль B ін'єктивний, то

$$\mathsf{R}^n\mathsf{F}(A) \simeq \begin{cases} \mathsf{R}^{n-1}\mathsf{F}(C), & \text{якщо } n > 1, \\ \operatorname{Coker} \mathsf{R}^0\mathsf{F}(\beta), & \text{якщо } n = 1. \end{cases}$$

(2) Якщо модуль B проективний, то

$$\mathsf{L}_n\mathsf{F}(C) \simeq \begin{cases} \mathsf{L}_{n-1}\mathsf{F}(A), & \text{якщо } n > 1, \\ \operatorname{Ker} \mathsf{L}_0\mathsf{F}(\alpha), & \text{якщо } n = 1. \end{cases}$$

Вправа 5. Як виглядають твердження, аналогічні сформульованих у попередніх вправах для контраваріантних функторів. Дайте зразок одного з доведень.

Завдання 7

Виконати до 3 листопада

Вправа 1. Нехай H і G — два когомолгічних функтори, причому $\mathsf{H}^n = \mathsf{G}^n = 0$ при $n > 0$ і $\mathsf{H}^n(P) = \mathsf{G}^n(P) = 0$, як тільки модуль P проективний, а $n < 0$. Доведіть, що для кожного морфізму функторів $\phi : \mathsf{H}^0 \to \mathsf{G}^0$ існує єдиний морфізм когомологічних функторів $f : \mathsf{H} \to \mathsf{G}$, для якого $f^0 = \phi$.

Вправа 2. Позначимо $T_A = A \otimes_{\boldsymbol{R}} \_$, ${}_BT = \_ \otimes_{\boldsymbol{R}} B$. Доведіть, що для кожних модулів A, B і всіх n існують ізоморфізми $\tau_n(A,B) : \mathsf{L}_nT_A(B) \to \mathsf{L}_n({}_BT)(A)$ такі, що для довільних морфізмів $\alpha : A \to A'$ і $\beta : B \to B'$ діаграми

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{L}_nT_A(B) \arrow[r, "\mathsf{L}_nT_A(\beta)"] \arrow[d, "\tau(A,B)"'] & \mathsf{L}_nT_A(B') \arrow[d, "\tau(A,B')"] \\
\mathsf{L}_n({}_BT)(A) \arrow[r, "\mathsf{L}_n(1\otimes\beta)"'] & \mathsf{L}_n({}_{B'}T)(A)
\end{tikzcd}$$

і

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{L}_nT_A(B) \arrow[r, "\mathsf{L}_n(\alpha\otimes 1)"] \arrow[d, "\tau(A,B)"'] & \mathsf{L}_nT_{A'}(B) \arrow[d, "\tau(A',B)"] \\
\mathsf{L}_n({}_BT)(A) \arrow[r, "\mathsf{L}_n{}_BT(\alpha)"'] & \mathsf{L}_n({}_BT)(A')
\end{tikzcd}$$

комутативні.

Завдання 8

Виконати до 10 листопада

Вправа 1. Нехай $0 \to A \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{m-1} \xrightarrow{\beta} B \to 0$ — точна послідовність з ін'єктивними модулями I_i $(0 \leqslant i < m)$. Довести, що

$$R^{n+m}F(A) \simeq \begin{cases} \mathsf{R}^n\mathsf{F}(B), & \text{якщо } n > 0, \\ \operatorname{Coker} \mathsf{R}^0\mathsf{F}(\beta), & \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

Сформулювати й довести аналогічне твердження для лівих похідних.

Вправа 2. Обчислити $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ і $\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_n(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Порада: Якою є проективна резольвента групи $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ як $\mathbb{Z}$-модуля?

Перенести цей результат на модулі над комутативною областю головних ідеалів.

Вправа 3. Нехай A — $\boldsymbol{R}$-модуль, M — $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{S}$-бімодуль, B — $\boldsymbol{S}$-модуль. Доведіть, що якщо B ін'єктивний, то

$$\operatorname{Ext}^n_{\boldsymbol{R}}(A, \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(M, B)) \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\operatorname{Tor}^{\boldsymbol{R}}_n(M, A), B).$$

Порада: Якщо P — проективна резольвента A, то $\operatorname{Tor}^{\boldsymbol{R}}_n(M, A) = H_n(M \otimes_{\boldsymbol{R}} P)$. Оскільки B ін'єктивний, функтор $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\_\,, B)$ точний. Скористайтесь тепер Вправою 1 із Завдання 5 і формулою спряженості для $\mathcal{H}om$ і $\otimes$.

Завдання 9

Виконати до 17 листопада

Вправа 1. (1) Комутативний квадрат

(1)
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

зветься *універсальним*, або *декартовим*, якщо для кожного комутативного квадрату

(2)
$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\alpha''"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

існує єдиний морфізм $\gamma : D' \to D$ такий, що $\alpha'' = \alpha'\gamma,\ be'' = \beta'\gamma$. Доведіть, що за кожною парою морфізмів $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$ можна побудувати декартів квадрат (1), а якщо (2) — інший декартів квадрат, то морфізм $\gamma : D' \to D$, про який йдеться вище, є ізоморфізмом.

(2) Дайте дуальне означення *коуніверсального* (*кодекартова* квадрата й доведіть його існування та єдиність з точністю до ізоморфізму.

(Фактично цими конструкціями ми вже користувалися.)

Вправа 2. (1) Доведіть, що діаграма з точними рядками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, equal] & C' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\gamma"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r, "\alpha"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

є комутативною тоді й лише тоді, коли правий квадрат в ній декартів. Виведіть звідси, що перший рядок цієї діаграми визначається її другим рядком і гомоморфізмом $f : A' \to A$ з точністю до еквівалентності розширень з $\mathcal{E}(A', B)$.

(2) Сформулюйте й доведіть аналогічне твердження для кодекартових квадратів, гомоморфізму $g : B \to B'$ і розширень з $\mathcal{E}(A, B')$.

Вправа 3. Визначимо $\mathcal{E}^n(A, B)$ як множину класів еквівалентності точних послідовностей вигляду

$$\varepsilon : 0 \to B \to X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^{n-1} \to A \to 0$$

відносно найменшого відношення еквівалентності $\sim$ такого, що якщо існує комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\varepsilon: & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & X^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\varepsilon': & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

то $\varepsilon \sim \varepsilon'$. (Чи обов'язково вертикальні морфізми будуть ізоморфізмами?)

Фіксуємо точну послідовність $\iota : 0 \to B \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{n-1} \xrightarrow{\nu} N \to 0$ з ін'єктивними I^k.

(1) Для кожної послідовності $\varepsilon \in \mathcal{E}^n(A, B)$ і морфізму $\eta : A' \to A$ визначити послідовність $\varepsilon{\bullet}\eta \in \mathcal{E}^n(A', B)$ і перевірити, що якщо $\varepsilon \sim \varepsilon'$, то й $\varepsilon{\bullet}\eta \sim \varepsilon'{\bullet}\eta$.

(2) Довести, що довільна послідовність $\varepsilon \in \mathcal{E}^n(A, B)$ еквівалентна $\iota{\bullet}\eta$ для деякого $\eta : A \to N$, причому якщо $\eta' = \eta + \nu\gamma$ для деякого $\gamma : A \to I^{n-1}$, то $\iota{\bullet}\eta \sim \iota{\bullet}\eta'$.

(3) Визначимо $\Theta(\varepsilon) = \delta(\eta)$, якщо $\varepsilon \sim \iota{\bullet}\eta$, де $\delta : \operatorname{Hom}(A, N) \to \operatorname{Ext}^n(A, B)$ походить з ізоморфізму $\operatorname{Ext}^n(A, B) \simeq \operatorname{Coker}(\nu{\bullet})$ (див. Вправу 1 з Завдання 8). Доведіть, що Θ — бієкція $\mathcal{E}^n(A, B)$ на $\operatorname{Ext}^n(A, B)$ (обернене відображення конструюється за допомогою пункту 2).

Завдання 10

Виконати до 24 листопада

Вправа 1. Нехай M є $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{S}$-бімодулем, A — $\boldsymbol{S}$-модулем, B — $\boldsymbol{R}$-модулем. Доведіть, що якщо модуль A є проективним, то $\operatorname{Ext}^n_{\boldsymbol{R}}(M \otimes_{\boldsymbol{S}} A, B) \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(A, \operatorname{Ext}^n_{\boldsymbol{R}}(A, \operatorname{Ext}^n_{\boldsymbol{R}}(M, B))$.

Вправа 2. (1) Доведіть, що $\operatorname{pr.dim} A$ — це найменше n, для якого існує точна послідовність

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

з проективними модулями P_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

(2) Нехай $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точна послідовність. Доведіть, що
   (a) $\operatorname{pr.dim} A \leqslant \max\{\operatorname{pr.dim} B, \operatorname{pr.dim} C - 1\}$.
   (b) $\operatorname{pr.dim} B \leqslant \max\{\operatorname{pr.dim} A, \operatorname{pr.dim} C\}$.
   (c) $\operatorname{pr.dim} C \leqslant \max\{\operatorname{pr.dim} B, \operatorname{pr.dim} A + 1\}$.

Сформулюйте й доведіть аналогічні твердження для ін'єктивної й слабкої розмірності.

Вправа 3. Доведіть, що

$$\begin{aligned}\operatorname{w.gl.dim} \boldsymbol{R} &= \max\{\operatorname{w.dim} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{I} \text{ — правий ідеал } \boldsymbol{R}\}\\ &= \max\{\operatorname{w.dim} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{I} \text{ — лівий ідеал } \boldsymbol{R}\} = \operatorname{w.gl.dim} \boldsymbol{R}^{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

Вправа 4. Нехай $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(1) Побудуйте проективну резольвенту $\boldsymbol{R}$-модуля $m\boldsymbol{R}$, де $m \mid n$. Чому дорівнює його проективна розмірність?
(2) Доведіть, що або $\operatorname{gl.dim} \boldsymbol{R} = 0$, або $\operatorname{gl.dim} \boldsymbol{R} = \infty$.

Вправа 5. Доведіть, що абелева група є плоскою (як $\mathbb{Z}$-модуль) тоді й лише тоді, коли це група без скруту.

Завдання 11

Виконати до 1 грудня

Вправа 1 (Лема Шануеля або «перехресний закон»)**.**

(1) Нехай $\varepsilon : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} I \to B \to 0$ і $\varepsilon' : 0 \to A \xrightarrow{\beta} C \to B' \to 0$ — точні послідовності, причому модуль I ін'єктивний. Доведіть, що існує точна послідовність $0 \to C \to I \oplus B' \to B \to 0$. Зокрема, якщо C також ін'єктивний, то $I \oplus B' \simeq C \oplus B$.

Порада: Розгляньте розширення $\alpha\varepsilon'$ і $\beta\varepsilon$: вони мають спільний середній член,

(2) Сформулюйте й доведіть аналог цього твердження для проективних модулів.

Вправа 2. Модуль A зветься *скінченно заданим*, якщо існує епік $\pi : F \to A$, де F — скінченнопороджений вільний модуль і $\operatorname{Ker}\pi$ — також скінченнопороджений модуль. (Це означає, що A має скінченну множину твірних, між якими є скінченна множина визначальних співвідношень). Доведіть, що якщо модуль A є скінченно заданим, модуль B скінченнопороджений і $\beta : B \to A$ — епік, то $\operatorname{Ker}\beta$ — скінченнопороджений модуль.

Порада: Скористайтесь Задачею 1 (2).

Вправа 3. Доведіть, що скінченно заданий модуль A над локальним кільцем $\boldsymbol{R}$ з тілом лишків $\Bbbk$ є проективним тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(A, \Bbbk) = 0$.

Вправа 4. Доведіть, що якщо $\boldsymbol{R}$-модуль A є скінченно заданим, M — $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{S}$-бімодуль, а I — ін'єктивний $\boldsymbol{S}$-модуль, то морфізм $\gamma : \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(B, I) \otimes_{\boldsymbol{R}} A \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{R}}(A, B), I)$ такий, що $\gamma(f \otimes a)(g) = f(g(a))$, є ізоморфізмом.

Порада: Застосуйте обидва функтори до точної послідовності $F' \to F \to A \to 0$, де F і F' — скінченнопороджені вільні модулі.

Вправа 5. Доведіть, що скінченно заданий модуль A є проективним тоді й лише тоді, коли він є плоским.

Порада: Скористайтесь ізоморфізмом $\widehat{\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{R}}(A, B)} \simeq \hat{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} B$, де $\hat{A} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Завдання 12

Виконати до 8 грудня

У всіх вправах $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$, групова алгебра деякої групи G,
$\boldsymbol{J} = \left\{ \sum_{g \in G} z_g g \in \boldsymbol{R} \mid \sum_{g \in G} z_g = 0 \right\} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{R} \to \mathbb{Z})$,
$A^G = \{ a \in A \mid ga = a \text{ для всіх } g \in G \}$ — підмодуль нерухомих елементів G-модуля A.

Вправа 1. Нехай X — множина твірних групи G. Доведіть, що $\{ g - 1 \mid g \in X \}$ — множина твірних $\boldsymbol{J}$ як лівого ідеалу.

Вправа 2.
(1) Нехай G — скінченна група, $s_G = \sum_{x \in G} x$. Доведіть, що елемент $r \in \boldsymbol{R}$ належить $\boldsymbol{R}^G$ тоді й лише тоді, коли $r = zs_G$ для деякого $z \in \mathbb{Z}$. Отже, ідеал нерухомих елементів ізоморфний $\mathbb{Z}$.
(2) Доведіть, що якщо група G є нескінченною, то $\boldsymbol{R}^G = \{0\}$.

Вправа 3.
(1) Нехай $G = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$ — циклічна група порядку n, $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — множення на $g - 1$, $\beta : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — множення на s_G. Доведіть, що $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$ і комплекс

$$\ldots \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{R} \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{R} \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{R} \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{R} \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{R} \to 0$$

є вільною резольвентою модуля $\mathbb{Z}$.
(2) Виведіть звідси, що при $n > 0$

$$H^n(G, A) \simeq \begin{cases} A^G / s_G A & \text{якщо } n \text{ парне;} \\ \{ a \in A \mid s_G a = 0 \} / (g-1)A & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

(3) Перевірте, що кожен елемент $a \in A^G$ задає систему факторів

$$\lambda(g^i, g^j) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } i + j < n \ , \\ a & \text{якщо } i + j \geqslant n, \end{cases}$$

де $i, j \in \{ 0, 1, \ldots, n-1 \}$,

Вправа 4. Нехай G — вільна абелева група з вільними твірними $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Доведіть, що $\mathbf{g} = (g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_n - 1)$ — регулярна послідовність у кільці $\boldsymbol{R}$, а комплекс Косуля $\mathbf{K}(\mathbf{g})$ — вільна резольвента $\boldsymbol{R}$-модуля $\mathbb{Z}$.

Порада: $\mathbf{g}$ є регулярною послідовністю у кільці многочленів $\boldsymbol{R}_0 = \mathbb{Z}[g_1, g_2, \ldots, g_n]$, а кожен елемент з $\boldsymbol{R}$ подається у вигляді $q^{-1}f$, де $q \in G$, $f \in \boldsymbol{R}_0$.