30 березня 2018

Вправа 1

Визначимо *спуск* пари морфізмів (α, β), де $\alpha : A \to B$, $\beta : A \to C$, як фактормодуль D прямої суми $B \oplus C$ за підмодулем $\{ (\alpha a, -\beta a) \mid a \in A \}$. Визначимо $\alpha' : C \to D$ і $\beta' : B \to D$ як композицію, відповідно, занурень $C \to B \oplus C$ і $B \to B \oplus C$ з стандартною сюр'єкцією $B \oplus C \to D$.

Доведіть, що діаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\beta'"] \\ C \arrow[r, "\alpha'"] & D \end{tikzcd}$$

є комутативною, тобто $\alpha'\beta = \beta'\alpha$, і для кожної пари гомоморфізмів (α'', β''), де $\alpha'' : C \to M$, $\beta'' : B \to M$, такої, що $\alpha''\beta = \beta''\alpha$, існує єдиний гомоморфізм $\gamma : D \to M$ такий, що $\alpha'' = \gamma\alpha'$ і $\beta'' = \gamma\beta'$.

Перевірте, що якщо α — монік, то й α' також монік.

Вправа 2

Модуль Q зветься *ін'єктивним*, якщо для кожного моніка $\alpha : A \to B$ і кожного гомоморфізму $\beta : A \to Q$ існує його продовження на B, тобто такий гомоморфізм $\widetilde{\beta} : Q \to B$, що $\beta = \widetilde{\beta}\alpha$. «Діаграмно» це зображується так:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[dl, dotted, "\widetilde{\beta}"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Доведіть, що модуль Q є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли кожен монік $\alpha : Q \rightarrowtail A$ має *лівий обернений*, тобто такий $\alpha' : A \to Q$, що $\alpha'\alpha = 1_Q$. Інакше: якщо Q є підмодулем в A, у нього завжди є *доповнення*, тобто такий підмодуль A', що $A = Q \oplus A'$.

Порада: Скористайтеся конструкцією спуску.

Доведіть також, що якщо $F : R\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} S\text{-Mod}$ — еквівалентність категорій, а R-модуль Q ін'єктивний, то S-модуль FQ також ін'єктивний.

Вправа 3

Нехай задано набір модулів $\{ A_k \mid k \in I \}$ (множина індексів I може бути нескінченною). Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Модуль A ізоморфний прямому добутку $\prod_{k\in I} A_k$.

(2) Існує ізоморфізм функторів

$$\mathrm{Hom}(\_, A) \xrightarrow{\sim} \prod_{k\in I} \mathrm{Hom}(\_, A_k).$$

(3) Існують морфізми $i_k : A_k \to A$ і $p_k : A \to A_k$ такі, що $i_k p_k = 1_k$, $i_k p_j = 0$ при $j \neq k$ і для кожного набору $\{ \alpha_k \mid \alpha_k : B \to A_k \}$ існує єдиний морфізм $\alpha : B \to A$ такий, що $\alpha_k = p_k\alpha$ для всіх k.

6 квітня 2018

Вправа 4

Доведіть друге твердження з леми про 4 морфізми:

Якщо у комутативній діаграмі з точними рядками

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & M_1 \arrow[d, "\gamma_4"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4
\end{tikzcd}$$

γ_2 і γ_4 — моніки, а γ_1 — епік, то γ_3 — монік.

Вправа 5

Доведіть, що послідовність $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3$ є точною тоді й лише тоді, коли для кожного модуля N точною є послідовність

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, M_1) \xrightarrow{\alpha\cdot} \mathrm{Hom}(N, M_2) \xrightarrow{\beta\cdot} \mathrm{Hom}(N, M_3)$$

Вправа 6

Доведіть, що функтор $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ є точним зліва тоді й лише тоді, коли для кожної точної послідовності $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} M_3$ точною є послідовність $0 \to FM_1 \xrightarrow{F\alpha_1} FM_2 \xrightarrow{F\alpha_2} FM_3$.

Вправа 7

Кажуть, що пара функторів (F, G), де $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ і $G : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$, є *спряженою*, якщо існує ізоморфізм біфункторів

$$\mathrm{Hom}_A(M, GN) \simeq \mathrm{Hom}_B(FM, N) \text{ де } M \in A\text{-Mod},\ N \in B\text{-Mod}.$$

Кажуть також, що G — *правий спряжений* до F, а F — *лівий спряжений* до G. Доведіть, що тоді функтор F є точним справа, а G — точним зліва.

20 квітня 2018

Вправа 7

Доведіть, що категорія скінченнопороджених модулів над скінченним кільцем є напівлокальною.

Адитивна категорія $\mathscr{C}$ зветься *цілком адитивною* (або *карубієвою*), якщо для кожного ідемпотента $e \in \operatorname{End} M$ в ній існує об'єкт M_1 та морфізми $i_1 : M_1 \to M,\ p_1 : M \to M_1$ такі, що $p_1 i_1 = 1_{M_1}$. Оскільки $1 - e$ — теж ідемпотент, одержимо діаграму прямої суми

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, bend left, "i_1"] & M \arrow[l, bend left, "p_1"] \arrow[r, bend right, "p_2"'] & M_2 \arrow[l, bend right, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

Вправа 8

Нехай $\mathscr{C}$ — цілком адитивна категорія і в ній $M \oplus X \simeq N \oplus Y$, де об'єкти M, N локальні. Доведіть, що тоді або $M \simeq N$ і $X \simeq Y$, або $X \simeq N \oplus X',\ Y \simeq M \oplus Y'$, де $X' \simeq Y'$.

Порада: Доведіть спочатку, що якщо ізоморфізм $M \oplus X \to N \oplus Y$ задається такою матрицею $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, що α — ізоморфізм, то $X \simeq Y$.

Вправа 9

Доведіть, що кожен лівий або правий ніль-ідеал (тобто ідеал, всі елементи якого нільпотентні) міститься у радикалі.

Вправа 10

Нехай $\alpha : M \to N$. Позначимо $\bar{\alpha}$ індукований ним гомоморфізм $M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$. Доведіть, що α епік тоді й лише тоді, коли $\bar{\alpha}$ епік.

Вправа 11

Цоколем $\operatorname{soc} M$ модуля M зветься сума його простих підмодулів (0, якщо таких немає). Доведіть, що

(1) $\alpha(\operatorname{soc} M) \subseteq \operatorname{soc} N$ для кожного гомоморфізму $\alpha : M \to N$.

(2) $\operatorname{soc} \boldsymbol{A}$ — двосторонній ідеал і $(\operatorname{soc} \boldsymbol{A})M \subseteq \operatorname{soc} M$.

Зауважимо, що можливо $\operatorname{soc} \boldsymbol{A} \neq \operatorname{soc} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$.

27 квітня

Вправа 12

(Усі модулі тут — скінченної довжини.)

Доведіть, що

(1) Якщо N — підмодуль M, то $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$.
(2) Якщо $0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to 0$ — точна послідовність, то $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \ell(M_i) = 0$.

Вправа 13

Доведіть, що якщо модуль M є напівпростим, то $\operatorname{rad} M = 0$.

Вправа 14

Доведіть, що артінове кільце $\boldsymbol{A}$ є напівпростим тоді й лише тоді, коли $\operatorname{rad} \boldsymbol{A} = 0$. Наведіть приклад, що без умови артіновості це невірно.

Вправа 15

Доведіть, що якщо U — простий підмодуль в M, то або у нього є пряме доповнення, або $U \subseteq \operatorname{rad} M$ (ніколи не одночасно). Виведіть звідси, що якщо U — мінімальний ідеал артінова кільця, то або $U^2 = 0$, або $U = \boldsymbol{A}e$, де e — ідемпотент.

12 травня

Вправа 16

Нехай i — від'ємна вершина сагайдака Γ, V — зображення цього сагайдака, яке не має прямих доданків E_i.

(1) $\dim(S_i^- V) = \sigma_i(\dim V)$.

(2) $S_i^- V$ не має прямих доданків E_i.

(3) $S_i^+ S_i^- V \simeq V$.

(4) Якщо V нерозкладне, таким є й $S_i^- V$ і навпаки.

Вправа 17

Нехай Γ — сагайдак типу A_n, тобто, без урахування орієнтації, має вигляд

$$1 \;\text{——}\; 2 \;\text{——}\; \dots \;\text{——}\; (n-1) \;\text{——}\; n$$

(1) Доведіть, що всі додатні корені його форми Тітса — це $\mathbf{q}_{kl} = \sum_{i=k}^{l} e_i$, де $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$ ($\mathbf{q}_{kk} = e_k$).

(2) Який вигляд має нерозкладне зображення V_{kl} таке, що $\dim V_{kl} = \mathbf{q}_{kl}$?

Вправа 18

Знайдіть додатні корені форми Тітса сагайдака D_4, тобто, без урахування орієнтації,

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 3 \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 4 \end{tikzcd}$$

Побудуйте відповідні нерозкладні зображення.

Вправа 19

Нехай i — додатна вершинп сагайдака Γ, V і W — його зображення, які не містять прямих доданків E_i. Доведіть, що $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq \mathrm{Hom}(S_i V, S_i W)$.

Порада: Перевірте, що $S_i^- S_i^+ \phi = \phi$ (при ототожненні V і W з $S_i^- S_i^+ V$ і $S_i^- S_i^+ V$).