1. Компактні групи

Означення 1.1. *Топологічна група* — це топологічний простір G, на якому визначена структура групи, тобто асоціативна операція (яка зазвичай зветься множенням) $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$, яка задовольняє аксіомам групи, причому відображення $m : G \times G \to G$ і $inv : G \to G$, $inv(a) = a^{-1}$ є неперервними.

Надалі ми завжди вважаємо, що простір G є *гаусдорфовим.* Відомо, що для цього достатньо, щоб множина $\{a\}$ була замкненою для якогось елемента a. Дійсно, якщо $\{a\}$ замкнене, то й $\{1\}$ замкнене, а тоді прообраз $\{1\}$ при неперервному відображенні $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$, яке є диагоналлю $\{\, (x, x) \mid x \in G \,\}$ теж замкнений. А це рівносильно гаусдорфовості.

Якщо простір G є компактним (локально компактним), кажуть, що G — *компактна група* (*локально компактна група*).

Важливим для теорії зображень є наступний факт, який ми наводимо без доведення.

Теорема 1.2. *На компактній групі G існує* інваріантна борелівська міра*, тобто така міра μ, визначена на всіх борелівських підмножинах, що $\mu(aB) = \mu(Ba)$ для довільної борелівської множини B і довільного елемента $a \in G$. Ця міра визначена з точністю до множника.*

Така міра зветься мірою Гаара*. Зазвичай її нормують так, щоб $\mu(G) = 1$ (і ми завжді дотримуємося цієї умови).*

Очевидно, тоді, зокрема, для довільної неперервної функції f на такій групі

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(ax)d\mu(x) = \int_G f(xa)d\mu(x).$$

Ця величина зветься *усередненням функції $f(x)$* по групі G.

З єдиності міри Гаара випливає, що відображення $g \mapsto g^{-1}$ зберігає цю міру, звідки також

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Надалі компактну групу ми завжди розглядаємо разом з нормованою мірою Гаара μ і замість $d\mu(x)$ пишемо dx.

Приклад 1.3.

(1) Якщо група G скінченна (тоді її топологія дискретна), міра Гаара визначається рівністю $\mu(x) = 1/\#(G)$ для кожного елемента x. Усереднення функції $f(x)$ тоді має вигляд

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{x \in G} f(x).$$

(2) Звичайна міра Лєбеґа на колі є мірою Гаара, якщо коло розглядати як групу кутів. Для нормування її треба поділити на довжину кола.

2. Зображення топологічних груп

Нехай G — топологічна група, V — топологічний векторний простір над полем комплексних чисел.[1] Зображення $\rho : G \to GL(V)$ звется *неперервним*, якщо відображення $G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto \rho(g)v$ є неперервним. Зокрема, у цьому випадку кожен оператор $\rho(g)$ є неперервним, а кожна функція $g \mapsto \rho(g)v$ при фіксованому v є також неперервною. Якщо V — нормований простір, зображення ρ зветься *обмеженим*, якщо всі оператори $\rho(g)$ є неперервними (тобто обмеженими) і їхні норми обмежені у сукупності.

Лема 2.1. *Якщо зображення топологічної групи G у нормованому просторі V є обмеженим і функція $g \mapsto \rho(g)v$ є неперервною при кожному $v \in V$, то це зображення неперервне.*

Доведення. Нехай $\|\rho(g)\| < N$ для всіх $g \in G$, $(x, v) \in G \times V$. Існує окіл U елемента g в групі G такий, що $\|\rho(x)v - \rho(y)v\| < \varepsilon$. Якщо $y \in U$, а $\|v - u\| < \varepsilon/N$, то

$$\|\rho(x)v - \rho)y)u\| \leqslant \|\rho(x)v - \rho(y)v\| + \|\rho(y)v - \rho(y)u\| \leqslant \varepsilon + N \cdot \varepsilon/N = 2\varepsilon,$$

тобто відображення $G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto \rho(g)v$ є неперервним. □

Якщо V — гільбертів простір, а всі оператори $\rho(g)$ унітарні, зображення ρ зветься *унітарним.* Звичайно, унітарне зображення завжди обмежене. Тому для його неперервності необхідно й достатньо, щоб при кожному v відображення $G \to V$, $g \mapsto \rho(g)v$ було неперервним. Ми позначаємл множину унітарних операторів у просторі V через $\mathbf{U}(V)$.

Якщо група G компактна, обмеження унітарності не є істотним, як показує наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $\rho : G \to \mathcal{L}(V)$ — неперервне зображення компактної групи G у гільбертовому просторі V. Існує такий скалярний добуток $\langle\, u, v \,\rangle$ у просторі V, що всі оператори $\rho(g)$ є унітарними відносно цього скалярного добутку і визначені добутками (u, v) і $\langle\, u, v \,\rangle$ топології збігаютъся.*

Доведення. Покладемо $\langle\, u, v \,\rangle = \int_G (\rho(x)u, \rho(x)v)dx$. Цей інтеграл існує, оскільки підінтегральна функція неперервна. Очевидно, $\langle\, u, v \,\rangle$ задовольняє всім аксіомам скалярного добутку. Для довільного $g \in G$

$$\begin{aligned}\langle\, \rho(g)u, \rho(g)v \,\rangle &= \int_G (\rho(g)\rho(x)u, \rho(g)\rho(x)v)dx = \int_G (\rho(gx)u, \rho(gx)v)dx = \\ &= \int_G (\rho(y)u, \rho(y)v)d(g^{-1}y) == \int_G (\rho(y)u, \rho(y)v)dy = \\ &= \langle\, u, v \,\rangle.\end{aligned}$$

[1] Усі твердження залишаються вірними, якщо замінити комплексні числа на дійсні або взагалі на довільне нормоване поле.

(ми зробили заміну $gx = y$ і скористалися інваріантністю міри Гаара). Це доводить перше твердження.

Позначимо $\|v\|$ і $\|v\|_1$, відповідно, норми у V відносно скалярних добутків (u, v) та $\langle u, v \rangle$. Функції $\|\rho(x)\|$ і $\|\rho(x^{-1}\|$ неперервні на G, тому вони обмежені: $\|\rho(x)\| \leqslant A$ і $\|\rho(x^{-1}) \leqslant B\|$ для деяких додатних чисел A, B. Тому

$$\|v\|_1^2 = \int_G \|\rho(x)v\|^2 dx \leqslant A^2 \int_G \|v\|^2 dx = A^2 \|v\|^2,$$

а також

$$\|v\|^2 = \int_G \|v\|^2 dx = \int_G \|\rho(x)^{-1}\rho(x)v\|^2 dx \leqslant B^2 \int_G \|\rho(x)v\|^2 dx = B^2 \|v\|_1^2.$$

Це доводить друге твердження. □

Отже, розглядаючи неперервні зображення компактної групи в гільбертовому просторі, можна завжди вважати його унітарним. і

Наслідок 2.3. *Якщо ρ — неперервне зображення компактної групи G у гільбертовому просторі V, U — замкнений інваріантний підпростір, то існує такий замкнений інваріантний підпростір U', що $V = U \oplus U'$.я*

Доведення. Зображення ρ можна вважати унітарним. Покладемо $U' = U^\perp$ (ортогональне доповнення до U). Тоді U' замкнене і $V = U \oplus U'$. Якщо $v \in U'$, $u \in U$, то $(\rho(x)v, u) = (v, \rho(x)^{-1}u) = 0$, оскільки $\rho(x)^{-1}u \in U$. Отже, U' також інваріантне. □

Надалі ми розглядаємо комплекснозначні функції на G. Насправді, усі твердження залишаються вірними і для функцій з дісними значеннями. Для довільної функції $f : G \to \mathbb{C}$ позначимо $R(g)f(x) = f(xg)$, де $g \in G$. Очевідно, якщо функція $f(x)$ неперервна (інтегровна по мірі Гаара), такою є й функція $R(g)f$. Позначимо $L_2(G) = L_2(G, \mu)$, де μ — міра Гаара. Нагадаємо, що $L_2(G)$ — гільбертів простір відносно скалярного добутку

$$(u, v) = \int_G u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Теорема 2.4. *Нехай G — компактна група. Відображення $R \mapsto R(g)$ є неперервним унітарним зображенням групи G у просторі $L_2(G)$.*
Це зображення зветься *регулярним зображенням компактної групи G.*

Доведення. Оскільки

$$(R(g)u, R(g)v) = \int_G u(xg)\overline{v(xg)} dx = \int_G u(y)\overline{v(y)} d(yg^{-1}) =$$
$$= \int_G u(y)\overline{v(y)} dy = (u, v),$$

це зображення є унітарним. Доведемо, що при фіксованій функції f відображення $G \to L_2(G)$, $g \mapsto f(xg)$ є неперервним.

Нехай спочатку $f(x)$ — неперервна функція. Оскільки група G компактна, функція $f(x)$ рівномірно неперервна, тобто існує окіл U одиниці групи G такий, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, якщо $y \in xU$. Тоді, якщо $g' \in gU$, то $|R(g)f(x) - R(g')f(x)| < \varepsilon$ для кожного $x \in G$, а тоді й $\|R(g)f - R(g')f\| < \varepsilon$.

Для довільної функції $f \in L_2(G)$ існує неперервна функція $f_c \in L_2(G)$ така, що $\|f - f_c\| < \varepsilon$. Виберемо окіл одиниці U у групі G так, щоб $\|\rho(g)f_c - \rho(g')f_c\| < \varepsilon$ при $g' \in gU$. Тоді, якщо $g' \in gU$,

$$\|R(g)f - R(g')f\| \leqslant \|R(g)f - R(g)f_c\| + \|R(g)f_c - R(g')f_c\| + \\ + \|R(g')f_c - R(g')f\| < 3\varepsilon,$$

оскільки всі оператори $R(g)$ унітарні, що й завершує доведення. □

3. Скінченновимірні зображення

Надалі ми вважаємо, що G — компактна група. З Теореми 2.2 і Наслідку 2.3 випливає, що довільне її скінченновимірне зображення подібне унітарному і є цілком звідним (тобто розкладається у пряму суму незвідних зображень). Нехай $\widehat{G} = \left\{ \rho^\lambda \mid \lambda \in \Lambda \right\}$ — множина всіх попарно неізоморфних унітарних скінченновимірних зображень групи G, де $\rho^\lambda : G \to \mathbf{U}(V^\lambda)$. Позначимо $d_\lambda = \dim V^\lambda$ Фіксуємо у кожному просторі V^λ ортонормовану базу $\left\{ e_i^\lambda \mid 1 \leqslant i \leqslant d_\lambda \right\}$ і позначимо через $\rho_{ij}^\lambda(g)$ коефіцієнти матриці оператора $\rho^\lambda(g)$ у цій базі. Відомо, що $\rho_{ij}^\lambda(g) = (\rho^\lambda(g)e_i, e_j)$. Оскільки $\rho^\lambda(g^{-1}) = \rho^\lambda(g)^*$ (спряжений оператор), то

$$\rho_{ij}^\lambda(g^{-1}) = (\rho^\lambda(g)^* e_i, e_j) = (e_i, \rho^\lambda(g)e_j) = \overline{(\rho^\lambda(g)e_j, e_i)} = \overline{\rho_{ji}^\lambda(g)}$$

. Позачимо також $\tilde{\rho}_{ij}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{d_\lambda}} \rho_{ij}^\lambda$.

Наступна теорема є основою теорії зображень компактних груп і гармонійного аналізу не таких групах.

Теорема 3.1. *Функції* $\left\{ \tilde{\rho}_{ij}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\, i, j = 1, 2, \ldots, d_\lambda \right\}$ *утворюють ортонормовану базу простору* $L_2(G)$.

Приклад 3.2. Нехай $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — «група кутів» (або одиничне коло). Тоді $L_2(G) = L_2[0, 2\pi]$. Оскільки G комутативна, її незвідні скінченновимірні зображення одновимірні, тобто гомоморфізми $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Відомо, що всі вони мають вигляд $x \mapsto e^{nxi}$. Тому Теорема 3.1 у цьому випадку перетворюється на відому теорему з аналізу Фур'є: кожна функція з $L_2[0, 2\pi]$ розкладається у ряд по кратним експонентам, який збігається у середньому квадратичному.

Як і для скінченних груп, и почнемо зі *співвідношень ортогональності.* Тут головним є наступний факт.

Лема 3.3. *Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ і $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ — скінченновимірні неперервні зображення компактної групи G, $A : V \to W$ — лінійне відображення. Тоді відображення*

$$\tilde{A} = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(x) dx$$

є гомоморфізмом зображень. Зокрема, якщо ці зображення незвідні і неізоморфні, то $\tilde{A} = 0$, а якщо $\rho = \theta$ — незвідне, то $\tilde{A} = \dfrac{\operatorname{Tr} A}{\dim V} \cdot \mathbf{1}$.

Доведення.

$$\tilde{A}\rho(g) = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(x) \rho(g) dx = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(xg) dx =$$

(заміна $y = xg$)

$$= \int_G \theta(gy^{-1}) A \rho(y) d(g^{-1}y) = \int_G \theta(g) \theta(y^{-1}) A \rho(y) dy =$$
$$= \theta(g) \tilde{A},$$

отже $\tilde{A} \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \theta)$.

Застосуємо лему Шура. Якщо ρ, θ незвідні неізоморфні, то $\tilde{A} = 0$. Якщо $\rho = \theta$ незвідне, то $\tilde{A} = \lambda \cdot \mathbf{1}$. Тоді $\operatorname{Tr} \tilde{A} = \lambda \dim V$, але

$$\operatorname{Tr} \tilde{A} = \int_G \operatorname{Tr}(\rho(x)^{-1} A \rho(x)) dx = \int_G \operatorname{Tr} A dx = \operatorname{Tr} A \int_G dx = \operatorname{Tr} A$$

і $\lambda = \dfrac{\operatorname{Tr} A}{\dim V}$. □