Завдання 1

Виконати до 21 лютого

1. Знайти занурення алгебри кватерніонів (над полем дійсних чисел) у матричну алгебру. Користуючись ним, довести, що ця алгебра є тілом.

2. Алгебра з одиницею A називається *моногенною*, якщо вона породжена одним елементом: $A = \Bbbk\langle\, a \,\rangle$ для деякого $a \in A$.

(1) Доведіть, що моногенна алгебра ізоморфна фактор-алгебрі $\Bbbk[t]/(f(t))$ для деякого многочлена $f(t)$.
Натяк: Можна скористатися теоремою про гомоморфізм.

(2) За яких умов ця алгебра є скінченновимірною? Чому дорівнює її розмірність?

3. Знайти центр і ідеали

(1) алгебри матриць $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$;

(2) Жорданової алгебри $\mathrm{J}_n(\Bbbk)$;

(3) моногенної алгебри $\Bbbk[t]/(f(t))$.

4. Нехай A — $\Bbbk$-алгебра розмірності 2 (з одиницею).

(1) Довести, що алгебра A є моногенною.

(2) Довести, що алгебра A або є полем, або ізоморфна Жордановій алгебрі $\mathrm{J}_2(\Bbbk)$, або ізоморфна прямому добутку $\Bbbk \times \Bbbk$.

5. Ненульова алгебра A називається *простою*, якщо в ній немає ідеалів, крім A та $\{0\}$. Доведіть, що комутативна проста алгебра є полем.

Завдання 2

Виконати до 28 лютого

1. (1) Довести, що незвідне зображення комутативної алгебри над алгебрично замкненим полем є одновимірним.
(2) Вивести звідси, що кожна комутативна підалгебра в $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, де поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим, спряжена з деякою підалгеброю алгебри трикутних матриць $\mathrm{T}_n(\Bbbk)$.

2. Нехай M — це n-вимірний простір числових векторів, розглянутий як модуль над алгеброю $\mathrm{T}_n(\Bbbk)$ трикутних $n \times n$ матриць.
(1) Знайдіть підмодулі модуля M.
(2) Побудуйте композиційний ряд у модулі M і знайдіть його фактори.
(3) Доведіть, що модуль M є нерозкладним.
(4) Знайдіть алгебру ендоморфізмів модуля M.

3. (1) Довести, що всі нільпотентні елементи комутативної алгебри утворюють в ній ідеал.
(2) Навести приклад некомутативної алгебри, в якій всі нільпотентні елементи не утворюють ідеалу.
(3) Елемент a алгебри A зветься *істотно нільпотентним*, якщо для будь-якого елемента $b \in A$ добуток ba є нільпотентним. Доведіть, що
 (a) рівносильну умову одержимо, якщо вимагати, щоб кожен добуток ab був нільпотентним;
 (b) множина всіх істотно нільпотентних зліва (справа) елементів є ідеалом;

4. Нехай $\Bbbk$ — поле характеристики 0, G — скінченна група порядку n, M, N — модулі над груповою алгеброю $\Bbbk G$, $f : M \to N$ — довільне лінійне відображення.
(1) Визначимо відображення $\widetilde{f} : M \to N$ правилом

$$\widetilde{f}(v) = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1} f(gv) \quad \text{для всіх } v \in M.$$

Доведіть, що відображення $\widetilde{f}$ є гомоморфізмом модулів.
(2) Виведіть звідси, що кожен підмодуль N у $\Bbbk G$-модулі M є прямим доданком. (Це — так звана «Теорема Машке»).
Натяк: Застосуйте попередній результат до якоїсь проекції $f : M \to N$, тобто такого лінійного відображення $f : M \to N$, що $\operatorname{Im} f = N$ і $f^2 = f$.

5. *Цоколем* $\operatorname{soc} M$ модуля M зветься сума всіх його мінімальних підмодулів. Довести, що для довільного гомоморфізму $f : M \to N$
(1) $f(\operatorname{soc} M) \subseteq \operatorname{soc} N$;
(2) якщо M скінченно вимірний, то f є мономорфізмом тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{soc} M = 0$ (тобто f індукує мономорфізм цоколів).

Завдання 3

Виконати до 14 березня

1. Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — підмодулі модуля M. Визначимо відображення $\gamma : M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \to M$ правилом $\gamma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i$.

(1) Доведіть, що γ є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли виконані такі умови:
  (a) $\sum_{i=1}^n M_i = M$;
  (b) $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$ для кожного $1 \leqslant i \leqslant n$.

(2) Перевірте, що умову (b) можна замінити такою:
  (b′) $M_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} M_j = \{0\}$ для всіх $1 < i \leqslant n$.

(3) Доведіть, що у $\operatorname{Ker}\gamma$ завжди є ланцюг підмодулів $\{0\} = N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots \subseteq N_n$ такий, що $N_i/N_{i-1} \simeq M_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} M_i$ для всіх $1 < i \leqslant n$.
  Натяк: Покладіть $N_i = \operatorname{Ker}\gamma \bigcap \Big\{ \sum_{j=1}^{i-1} v_j \mid v_j \in M_j \text{ і } v_i \neq 0 \Big\}$.

2. Доведіть, що комутативна алгебра є напівпростою тоді й лише тоді, коли кожна її моногенна підалгебра є напівпростою.

3. Нехай $\operatorname{char}\Bbbk$ ділить порядок скінченної групи G (зокрема, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 0$). Доведіть, що елемент $S = \sum_{g \in G} g$ належить центру групової алгебри $\Bbbk G$ і $S^2 = 0$. Виведіть звідси, що ця групова алгебра не є напівпростою.
Зауваження: З задачі 4 завдання 2 випливає, що, якщо $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, алгебра $\Bbbk G$ є напівпростою. Ті самі міркування проходять і у випадку, коли $\operatorname{char}\Bbbk > 0$, але не ділить порядок G.

4. Нехай поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим, а A — комутативна напівпроста підалгебра в алгебрі матриць $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Доведіть, що A є спряженою до деякої підалгебри в алгебрі діагональних матриць.

5. Нехай $A = \mathrm{M}_n(F)$, де F — алгебра з діленням розмірності d, $V = nF$ — простір числових векторів розмірності n з коефіцієнтами з тіла F, розглянутий як A-модуль. Доведіть, що

(1) V — простий A-модуль;
(2) ${}_A A \simeq nV$;
(3) кожен (скінченновимірний) A-модуль ізоморфний прямій сумі mV для деякого m.

6. Нехай A і B — ізоморфні прості підалгебри в $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Доведіть, що вони спряжені.

7. Нехай M — деякий A-модуль, а $e \in A$ — ідемпотент. Встановіть ізоморфізм векторних просторів eM та $\operatorname{Hom}_A(Ae, M)$. Зокрема, $\operatorname{Hom}_A(Ae, Ae') \simeq eAe'$. Перевірте, що при цьому ототожненні добутку gf гомоморфізмів $f : Ae \to Ae'$ та $g : Ae' \to Ae''$ відповідає добуток відповідних елементів з eAe' та $e'Ae''$. (Очевидно, цей добуток належить eAe'').

Завдання 4

Виконати до 21 березня

1. Для яких многочленів $f(t)$ моногенна алгебра $\Bbbk[t]/(f(t))$ є напівпростою? Якщо вона є напівпростою, яким є її розклад за теоремою Веддерберна–Артіна?

2. Доведіть, що алгебра є напівпростою тоді й лише тоді, коли у неї є точний напівпростий модуль.

3. Нехай A — напівпроста алгебра над алгебрично замкненим полем $\Bbbk$, $V_1, V_2, \dots, V_m$ — всі її попарно неізоморфні прості модулі, $n_i = \dim_{\Bbbk} V_i$. Доведіть, що $\sum_{i=1}^m n_i^2 = \dim_{\Bbbk} A$.

4. *Характером зображення* T алгебри A зветься функція $\chi_T : A \to \Bbbk$, де $\chi_T(a) = \operatorname{tr} T(a)$ (tr позначає *слід* матриці).

(1) Доведіть, що характери подібних зображень рівні. Отже, можна говорити про *характер A-модуля.*

Далі A — напівпроста алгебра над полем характеристики 0, $A = \prod_{i=1}^m A_i$ — її розклад у прямий добуток простих алгебр, $1 = \sum_{i=1}^m e_i$ — відповідний розклад одиниці в суму ортогональних центральних ідемпотентів, V_i — простий A_i-модуль, χ_i — його характер.

(2) Обчисліть $\chi_i(e_j)$.

(3) Доведіть, що два A-модулі є ізоморфними тоді й лише тоді, коли вони мають рівні характери.

(4) Нехай T, S — зображення A однакової розмірності, причому для кожного елемента $a \in A$ існує така невироджена матриця C_a, що $S(a) = C_a T(a) C_a^{-1}$. Доведіть, що зображення T і S подібні.

(5) Наведіть приклади, які показують, що твердження (3) і (4) є невірними, якщо
  (a) алгебра A не є напівпростою;
  (b) $\operatorname{char} \Bbbk \neq 0$.

5. Доведіть, що ізоморфні прості підалгебри алгебри $\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ є спряженими.

6. Нехай $A = \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$, X, Y — дві матриці з A. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Ліві ідеали AX і AY ізоморфні (як A-модулі).
(2) Праві ідеали XA й YA ізоморфні (як праві A-модулі).
(3) $\operatorname{rk} X = \operatorname{rk} Y$.

Завдання 5

Виконати до 28 березня

1. (1) Нехай M є G-модулем, $M^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ — дуальний простір до M. Визначимо на M^* структуру G-модуля за правилом: $(g\varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v)$ для всіх $v \in M$, $g \in G$. Доведіть, що якщо χ — характер модуля M, то характер χ^* модуля M^* визначається формулою $\chi^*(g) = \chi(g^{-1})$.

(2) Доведіть, що якщо $n = \#(G)$, $d = \dim T_a$, то для незвідних зображень T_a і T_b та відповідних характерів

$$\textstyle\sum_{g\in G} \chi_a(g) T_b(g) = \begin{cases} \frac{n}{d} I & \text{якщо } T_a \simeq (T_b)^* \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

2. Нехай група G діє на множині X, $F(X)$ — простір функцій на X із значеннями в полі $\Bbbk$.

(1) Визначимо на $F(X)$ структуру G-модуля, поклавши $(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)$ для кожної функції φ та довільних елементів $x \in X$, $g \in G$. Перевірте, що таке визначення є коректним.

(2) Обчисліть характер $\chi(g)$ цього зображення.

(3) Доведіть, що, якщо $\mathrm{char}\,\Bbbk$ не ділить $\#(X)$, то $F(X) = C \oplus F_0(X)$, де C — підпростір констант, а

$$F_0(X) = \left\{ \varphi \,\middle|\, \textstyle\sum_{x\in X} \varphi(x) = 0 \right\}.$$

(4) Нехай G — група всіх перестановок множини X. Доведіть, що підпростір $F_0(X)$ з пункту (3) є простим G-модулем і обчисліть його характер.

3. Розглянемо дію групи G на собі лівими зсувами. Доведіть, що тоді, у позначеннях попередніх вправ, $F(G) \simeq (\Bbbk G)^*$.

4. (1) Опишіть класи спряжених елементів у групі перестановок S_n.

(2) Доведіть, що кількість незвідних комплексних зображень групи S_n дорівнює кількості *розбиттів* числа n, тобто представлення n у вигляді суми $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, в якій $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$.

5. (1) Доведіть, що комутант групи S_n збігається з підгрупою A_n парних перестановок.

(2) Перевірте, що підгрупа $K = \{\, 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \,\}$ є інваріантною в S_4, а $S_4/K \simeq S_3$.

(3) Доведіть, що S_4 має 5 незвідних комплексних зображень: два одновимірні, одне двовимірне і два тривимірних.

(4) Знайдіть характери цих зображень.
Натяк: Скористайтеся результатом пп. (4) і (2) задачі 2.

6. Довести, що група парних перестановок A_4 має 4 незвідні комплексні зображення, з них 3 одновимірних та одне тривимірне. Знайдіть характери цих зображень.