1973 г. март — апрель *т. XXVIII, вып. 2 (170)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ФУНКТОРЫ КОКСТЕРА И ТЕОРЕМА ГАБРИЕЛЯ

И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев

В последнее время стало ясно, что целый ряд задач линейной алгебры допускает единую формулировку и в этой общей формулировке возникают общие эффективные методы исследования таких задач. Интересно, что эти методы оказываются связанными с такими понятиями, как группа Кокстера — Вейля и схемы Дынкина.

Мы изложим здесь эти связи на простейшей задаче. Никаких предварительных знаний мы не предполагаем. Мы также не касаемся здесь связей этих вопросов с теорией представлений групп и теорией бесконечномерных алгебр Ли. По этому поводу см. [3]—[5].

Пусть задан конечный связный граф Γ; множество его вершин мы будем обозначать через Γ_0, множество его ребер — через Γ_1 (мы не исключаем случаев, когда две вершины соединены несколькими ребрами или имеются ребра-петли, соединяющие вершину саму с собой). Фиксируем некоторую ориентацию Λ графа Γ; это значит, что для каждого ребра $l \in \Gamma_1$ отмечена начальная точка $\alpha(l) \in \Gamma_0$ и конечная точка $\beta(l) \in \Gamma_0$.

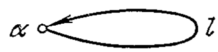
Сопоставим каждой вершине $\alpha \in \Gamma_0$ конечномерное линейное пространство V_α над фиксированным полем K. Далее отнесем каждому ребру $l \in \Gamma_1$ линейное отображение f_l: $V_{\alpha(l)} \to V_{\beta(l)}$ ($\alpha(l)$ и $\beta(l)$—начало и конец ребра l). Никаких соотношений на линейные отображения f_l мы не накладываем. Набор пространств V_α и отображений f_l мы обозначим (V, f).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть (Γ, Λ)—ориентированный граф. Определим *категорию* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ следующим образом. *Объектом* категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ будем считать любой набор (V, f) пространств V_α $(\alpha \in \Gamma_0)$ и отображений f_l $(l \in \Gamma_1)$. *Морфизмом* φ: $(V, f) \to (W, g)$ называется набор линейных отображений φ_α: $V_\alpha \to W_\alpha (\alpha \in \Gamma_0)$ такой, что для любого ребра $l \in \Gamma_1$ следующая диаграмма

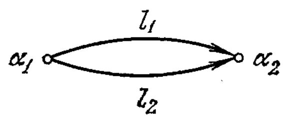
$$\begin{tikzcd}
V_{\alpha(l)} \arrow[r, "f_l"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha(l)}"] & V_{\beta(l)} \arrow[d, "\varphi_{\beta(l)}"] \\
W_{\alpha(l)} \arrow[r, "g_l"'] & W_{\beta(l)}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\varphi_{\beta(l)} f_l = g_l \varphi_{\alpha(l)}$.

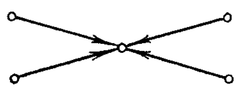
Многие задачи линейной алгебры могут быть сформулированы в этих терминах. Например, вопрос о каноническом виде линейного преобразования f: $V \to V$ связан с диаграммой



Классификация пары линейных отображений f_1: $V_1 \to V_2$ и f_2: $V_1 \to V_2$ приводит к графу



Очень интересна задача о классификации четверок подпространств в линейном пространстве, которая соответствует графу



Эта последняя задача содержит в себе много задач линейной алгебры 1).

Пусть $(\Gamma,\ \Lambda)$—ориентированный граф. Прямой суммой объектов $(V,\ f)$ и $(U,\ g)$ в категории $\mathscr{L}(\Gamma,\ \Lambda)$ является объект $(W,\ h)$, где $W_\alpha = V_\alpha \oplus U_\alpha$, $h_l = f_l \oplus g_l$ $(\alpha \in \Gamma_0,\ l \in \Gamma_1)$.

Мы будем называть ненулевой объект $(V,\ f) \in \mathscr{L}(\Gamma,\ \Lambda)$ неразложимым, если его нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых объектов. Простейшими неразложимыми объектами являются неприводимые объекты L_α $(\alpha \in \Gamma_0)$, которые строятся следующим образом: $(L_\alpha)_\gamma = 0$ при $\gamma \neq \alpha$, $(L_\alpha)_\alpha = K$, $f_l = 0$ для всех $l \in \Gamma_1$.

Ясно, что каждый объект $(V,\ f)$ категории $\mathscr{L}(\Gamma,\ \Lambda)$ изоморфен прямой сумме конечного числа неразложимых объектов 2).

Во многих случаях неразложимые объекты можно расклассифицировать 3).

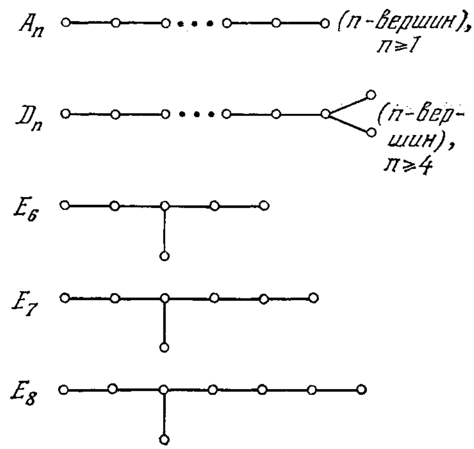
---

1) Поясним, как задача о каноническом виде линейного оператора $f: V \to V$ сводится к задаче о четверке подпространств. Для этого рассмотрим пространство $W = V \oplus V$ и в нем график отображения f, т. е. подпространство E_4 пар $(\xi,\ f\xi)$, где $\xi \in V$. Отображение f описывается четверкой подпространств в W, а именно, $E_1 = V \oplus 0$, $E_2 = 0 \oplus V$, $E_3 = \{(\xi,\ \xi) \mid \xi \in V\}$ (E_3 — диагональ) и $E_4 = \{(\xi,\ f\xi) \mid \xi \in V\}$ — график f. Два отображения f и f' эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие им четверки. Действительно, E_1 и E_2 задают «координатные плоскости» в W, E_3 устанавливает отождествление между ними, после чего E_4 задает отображение.

2) Можно показать, что такое разложение единственно с точностью до изоморфизма (см. [6], гл. II, § 14, теорема Крулля — Шмидта).

3) Мы думаем, что изучить те случаи, в которых явная классификация невозможна, ничуть не менее интересно. Однако мы затруднились бы точнее сформулировать, что значит в этом случае «изучение» объектов с точностью до изоморфизма. Естественные, на первый взгляд, предложения (рассматривать разбиение пространства объектов на траектории, исследовать версальные семейства, выделять «устойчивые» объекты и т. д.) не являются, на наш взгляд, сколько-нибудь окончательными.

В работе Габриеля [1] была поставлена и решена следующая задача: найти все графы (Г, Λ), для которых существует лишь конечное число неизоморфных между собой неразложимых объектов $(V, f) \in \mathscr{L}$ (Г, Λ). Им было сделано следующее удивительное наблюдение. Для того чтобы в категории $\mathscr{L}$(Г, Λ) было конечное число неразложимых объектов, необходимо и достаточно, чтобы граф Г совпадал с одним из следующих графов:



(от ориентации Λ этот факт не зависит). Удивительным здесь является тот факт, что эти графы в точности совпадают со схемами Дынкина простых групп Ли [1]).

Однако это еще не все. Как установил Габриель, неразложимые объекты категории $\mathscr{L}$(Г, Λ) естественно соответствуют положительным корням, построенным по схеме Дынкина Г.

В настоящей статье мы попытаемся до некоторой степени снять «мистику» с этого соответствия. А именно, в то время как в статье Габриеля связь со схемами Дынкина и корнями устанавливается апостериори, мы дадим доказательство теоремы Габриеля, основанное на использовании техники корней и групп Вейля. При этом мы не предполагаем, что читатель знаком с этими понятиями, и даем полное изложение нужных нам фактов.

Существенную роль в нашем доказательстве играют определяемые ниже функторы, которые мы называем функторами Кокстера (название возникло из-за связи этих функторов с преобразованиями Кокстера в группе Вейля). Для частного случая четверки подпространств эти функторы были введены в работе [2] (там они обозначены через Φ^+ и Φ^-). По существу, настоящая работа является синтезом идеи Габриеля о связи категорий диаграмм $\mathscr{L}$(Г, Λ) со схемами Дынкина и идей первой части работы [2], где с помощью функторов Φ^+ и Φ^- отделяются «простые» неразложимые объекты от более «сложных».

Мы надеемся, что используемая нами техника полезна не только для решения задачи Габриеля или для классификации четверок подпространств,

[1]) Точнее, здесь встречаются схемы Дынкина с однократными стрелками.

но и для решения многих других задач (быть может, не только задач линейной алгебры).

Некоторые соображения о задаче Габриеля, близкие к используемым в этой статье, были недавно высказаны А. В. Ройтером. Мы хотели бы также обратить внимание читателей на работы А. В. Ройтера, Л. А. Назаровой, М. М. Клейнера, Ю. А. Дрозда и др. (см. [3] и цитированную там литературу), в которых развиваются весьма эффективные алгоритмы решения задач линейной алгебры. В работе [3] А. В. Ройтер и Л. А. Назарова рассматривают задачу о классификации представлений упорядоченных множеств; полученные результаты близки к результатам Габриеля о представлениях графов.

§ 1. Функторы отражений и функторы Кокстера

Для изучения неразложимых объектов в категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ мы рассмотрим «функторы отражений», которые строят по каждому объекту $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ некоторый новый объект (в другой категории); при этом неразложимый объект переходит либо в неразложимый либо в нулевой объект. Такой функтор мы построим для каждой вершины α, в которой все ребра имеют одинаковое направление (т. е. либо все входят либо все выходят). Далее мы построим «функторы Кокстера» Φ^+ и Φ^-, переводящие категорию $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ в себя.

Для каждой вершины $\alpha \in \Gamma_0$ обозначим через Γ^α множество ребер, содержащих α. Если Λ — некоторая ориентация графа Γ, то через $\sigma_\alpha\Lambda$ мы будем обозначать ориентацию, получающуюся из Λ заменой направлений всех ребер $l \in \Gamma^\alpha$ на обратные.

Мы будем называть вершину α (—) допустимой (относительно ориентации Λ), если $\beta(l) \neq \alpha$ для всех $l \in \Gamma_1$ (это значит, что все ребра, содержащие точку α, начинаются в ней и в Γ нет петель с вершиной в точке α). Аналогично вершину β мы будем называть (+) допустимой, если для всех $l \in \Gamma_1$ $\alpha(l) \neq \beta$.

Определение 1.1. 1) Пусть вершина β графа Γ (+) допустима относительно ориентации Λ. Построим по объекту (V, f) из категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ новый объект (W, g) из категории $\mathscr{L}(\Gamma, \sigma_\beta\Lambda)$.

А именно, положим $W_\gamma = V_\gamma$ для $\gamma \neq \beta$.

Рассмотрим далее все ребра $l_1, l_2, \ldots, l_k$, кончающиеся в точке β (т. е. все ребра из Γ^β). Обозначим через W_β подпространство в прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{\alpha(l_i)}$, состоящее из векторов $v = (v_1, \ldots, v_k)$ (здесь $v_i \in V_{\alpha(l_i)}$), для которых $f_{l_1}(v_1) + \ldots + f_{l_k}(v_k) = 0$. Иначе говоря, если обозначить через h отображение $h\colon \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\alpha(l_i)} \to V_\beta$, задаваемое формулой $h(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f_{l_1}(v_1) + \ldots + f_{l_k}(v_k)$, то $W_\beta = \operatorname{Ker} h$.

Зададим теперь отображения g_l. Для $l \notin \Gamma^\beta$ положим $g_l = f_l$. Если $l = l_j \in \Gamma^\beta$, то отображение g_l определяется как композиция естественного вложения W_β в $\bigoplus V_{\alpha(l_i)}$ и проекции этой суммы на слагаемое $V_{\alpha(l_j)} = W_{\alpha(l_j)}$. Заметим, что на всех ребрах $l \in \Gamma^\beta$ ориентация сменилась на обратную, т. е. полученный объект (W, g) принадлежит категории $\mathscr{L}(\Gamma, \sigma_\beta\Lambda)$. Построенный объект (W, g) мы будем обозначать $F_\beta^+(V, f)$.

2) Пусть вершина $\alpha \in \Gamma_0$ $(-)$ допустима относительно ориентации Λ. Построим по объекту $(V, f) \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ новый объект $F_\alpha^-(V, f) = (W, g) \in \mathscr{L}(\Gamma, \sigma_\alpha\Lambda)$. А именно, положим

$$W_\gamma = V_\gamma \text{ при } \gamma \neq \alpha$$
$$g_l = f_l \text{ при } l \notin \Gamma^\alpha$$

$W_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\beta(l_i)}/\operatorname{Im}\widetilde{h}$, где $\{l_1, \ldots, l_k\} = \Gamma^\alpha$, а отображение $\widetilde{h}\colon V_\alpha \to \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\beta(l_i)}$ задается формулой $\widetilde{h}(v) = (f_{l_1}(v), \ldots, f_{l_k}(v))$. Если $l \in \Gamma^\alpha$, то отображение $g_l\colon W_{\beta(l)} \to W_\alpha$ определяется как композиция естественного вложения $W_{\beta(l)} = V_{\beta(l)}$ в $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{\beta(l_i)}$ и проекции этой прямой суммы на W_α.

Легко проверить, что F_β^+ (и аналогично F_α^-) является функтором из категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ в категорию $\mathscr{L}(\Gamma, \sigma_\beta\Lambda)$ (соответственно $\mathscr{L}(\Gamma, \sigma_\alpha\Lambda)$). Основным для нас является следующее свойство этих функторов.

Теорема 1.1. 1) *Пусть задан ориентированный граф* (Γ, Λ) *и вершина* $\beta \in \Gamma_0$, $(+)$ *допустимая относительно ориентации* Λ. *Пусть* $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — *неразложимый объект. Тогда возможны два случая*:

а) $V \approx L_\beta$ *и* $F_\beta^+ V = 0$ (*напомним, что* L_β — *неприводимый объект, определяемый условием* $(L_\beta)_\gamma = 0$ *при* $\gamma \neq \beta$, $(L_\beta)_\beta = K$, $f_l = 0$ *при всех* $l \in \Gamma_1$).

б) $F_\beta^+(V)$—*неразложимый объект*, $F_\beta^- F_\beta^+(V) = V$, *причем размерности пространств* $F_\beta^+(V)_\gamma$ *вычисляются по формуле*

$$\dim F_\beta^+(V)_\gamma = \dim V_\gamma \text{ при } \gamma \neq \beta, \tag{1.1.1}$$
$$\dim F_\beta^+(V)_\beta = -\dim V_\beta + \sum_{l \in \Gamma^\beta} \dim V_{\alpha(l)}.$$

2) *Если вершина* α $(-)$ *допустима относительно ориентации* Λ *и* $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$—*неразложимый объект, то возможны два случая*:

а) $V \approx L_\alpha$, $F_\alpha^-(V) = 0$.

б) $F_\alpha^-(V)$—*неразложимый объект*, $F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) = V$,

$$\dim F_\alpha^-(V)_\gamma = \dim V_\gamma \text{ при } \gamma \neq \alpha, \tag{1.1.2}$$
$$\dim F_\alpha^-(V)_\alpha = -\dim V_\alpha + \sum_{l \in \Gamma^\alpha} \dim V_{\beta(l)}.$$

Доказательство. Если вершина β $(+)$ допустима относительно ориентации Λ, то она $(-)$ допустима относительно ориентации $\sigma_\beta\Lambda$ и потому определен функтор $F_\beta^- F_\beta^+\colon \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda) \to \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$. Для каждого объекта $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ построим морфизм $i_V^\beta\colon F_\beta^- F_\beta^+(V) \to V$ следующим образом.

Если $\gamma \neq \beta$, то $F_\beta^- F_\beta^+(V)_\gamma = V_\gamma$ и мы положим $(i_V^\beta)_\gamma = \mathrm{Id}$ — тождественное отображение.

Для определения $(i_V^\beta)_\beta$ заметим, что в последовательности отображений $F_\beta^+(V)_\beta \xrightarrow{\widetilde{h}} \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)} \xrightarrow{h} V_\beta$ (см. определение 1.1) $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im}\widetilde{h}$; мы примем за

$(i_V^\beta)_\beta$ естественное отображение

$$F_\beta^- F_\beta^+ (V)_\beta = \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)}/\mathrm{Im}\,\widetilde{h} = \bigoplus_{l \in \Gamma^\beta} V_{\alpha(l)}/\mathrm{Ker}\,h \to V_\beta.$$

Легко проверить, что i_V^β — морфизм. Аналогично для каждой (—) допустимой вершины α строится морфизм p_V^α: $V \to F_\alpha^+ F_\alpha^- (V)$. Сформулируем основные свойства функторов F_α^-, F_β^+ и морфизмов p_V^α, i_V^β.

Лемма 1.1. 1) $F_\alpha^\pm (V_1 \oplus V_2) = F_\alpha^\pm (V_1) \oplus F_\alpha^\pm (V_2)$. 2) *$p_V^\alpha$ — эпиморфизм, i_V^β — мономорфизм.* 3) *Если i_V^β — изоморфизм, то размерности пространств $F_\beta^+ (V)_\gamma$ вычисляются по формуле* (1.1.1). *Если p_V^α — изоморфизм, то размерности пространств $F_\alpha^- (V)_\gamma$ вычисляются по формуле* (1.1.2). 4) *Объект* $\mathrm{Ker}\,p_V^\alpha$ *сосредоточен в точке α (т. е. $(\mathrm{Ker}\,p_V^\alpha)_\gamma = 0$ при $\gamma \neq \alpha$). Объект $V/\mathrm{Im}\,i_V^\beta$ сосредоточен в точке β.* 5) *Если объект V имеет вид $F_\alpha^+ W$ (соответственно $F_\beta^- W$), то p_V^α (i_V^β) — изоморфизм.* 6) *Объект V изоморфен прямой сумме объектов $F_\beta^- F_\beta^+ (V)$ и $V/\mathrm{Im}\,i_V^\beta$ (аналогично $V \approx F_\alpha^+ F_\alpha^- (V) \oplus \mathrm{Ker}\,p_V^\alpha$).*

Доказательство. Пункты 1), 2), 3), 4), 5) проверяются непосредственно. Докажем 6).

Нам нужно показать, что $V \approx F_\beta^- F_\beta^+ (V) \oplus \widetilde{V}$, где $\widetilde{V} = V/\mathrm{Im}\,i_V^\beta$. Естественная проекция φ'_β: $V_\beta \to \widetilde{V}_\beta$ допускает сечение φ_β: $\widetilde{V}_\beta \to V_\beta$ $(\varphi'_\beta \cdot \varphi_\beta = \mathrm{Id})$. Если положить $\varphi_\gamma = 0$ при $\gamma \neq \beta$, то мы получим морфизм φ: $\widetilde{V} \to V$. Ясно, что морфизмы φ: $\widetilde{V} \to V$ и i_V^β: $F_\beta^- F_\beta^+ (V) \to V$ задают разложение V в прямую сумму. Аналогично доказывается, что $V \approx F_\alpha^+ F_\alpha^- (V) \oplus \mathrm{Ker}\,p_V^\alpha$.

Докажем теперь теорему 1.1. Пусть V — неразложимый объект категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$, β — (+) допустимая вершина относительно ориентации Λ. Так как $V \approx F_\beta^- F_\beta^+ (V) \oplus V/\mathrm{Im}\,i_V^\beta$ и V неразложим, то V совпадает с одним из слагаемых.

Случай I). $V = V/\mathrm{Im}\,i_V^\beta$. Тогда $V_\gamma = 0$ при $\gamma \neq \beta$ и в силу неразложимости V $V \approx L_\beta$.

Случай II). $V = F_\beta^- F_\beta^+ (V)$, т. е. i_V^β — изоморфизм. Тогда в силу леммы 1.1 выполнена формула 1.1.1. Покажем, что объект $W = F_\beta^+ (V)$ неразложим. Действительно, пусть $W = W_1 \oplus W_2$. Тогда $V = F_\beta^- (W_1) \oplus \oplus F_\beta^- (W_2)$ и, значит, одно из слагаемых (например $F_\beta^- (W_2)$) есть 0. В силу п. 5) леммы 1.1 морфизм p_V^β: $W \to F_\beta^+ F_\beta^- (W)$ является изоморфизмом, но $p_V^\beta (W_2) \subset F_\beta^+ F_\beta^- (W_2) = 0$, т. е. $W_2 = 0$.

Этим мы показали, что объект $F_\beta^+ (V)$ неразложим. Аналогично доказывается п. 2) теоремы 1.1.

Будем называть последовательность вершин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (+) допустимой относительно ориентации Λ, если α_1 (+) допустима относительно ориентации Λ, α_2 (+) допустима относительно ориентации $\sigma_{\alpha_1}\Lambda$, α_3 — относительно $\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}\Lambda$ и т. д. Аналогично определим (—) допустимые последовательности.

Следствие 1.1. *Пусть (Γ, Λ) — ориентированный граф, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ — (+) допустимая последовательность.*

1) *Для любого* i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ $F^-_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot F^-_{\alpha_{i-1}}(L_{\alpha_i})$ *либо равно* 0 *либо является неразложимым объектом в* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ (*здесь* $L_{\alpha_i} \in \mathscr{L}(\Gamma, \sigma_{\alpha_{i-1}}\sigma_{\alpha_{i-2}} \ldots \sigma_{\alpha_1}\Lambda)$)[1].

2) *Пусть* $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — *неразложимый объект, причем*

$$F^+_{\alpha_k}F^+_{\alpha_{k-1}} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_1}(V) = 0.$$

Тогда для некоторого i

$$V \approx F^-_{\alpha_1}F^-_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot F^-_{\alpha_{i-1}}(L_{\alpha_i}).$$

Проиллюстрируем применение функторов F^+_β и F^-_α на следующей теореме.

Теорема 1.2. *Пусть* Γ — *граф без циклов* (*в частности, без петель*), Λ, Λ' — *две его ориентации.*

1) *Существует такая последовательность вершин* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, (+) *допустимая относительно* Λ, *что* $\sigma_{\alpha_k}\sigma_{\alpha_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \sigma_{\alpha_1}\Lambda = \Lambda'$.

2) *Пусть* $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$ — *множество классов* (*с точностью до изоморфизма*) *неразложимых объектов в* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ *и* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda')$, $\widetilde{\mathscr{M}} \subset \mathscr{M}$ — *множество классов объектов* $F^-_{\alpha_1}F^-_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot F^-_{\alpha_{i-1}}(L_{\alpha_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\widetilde{\mathscr{M}}' \subset \mathscr{M}'$ — *множество классов объектов* $F^+_{\alpha_k} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_{i+1}}(L_{\alpha_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. *Тогда функтор* $F^+_{\alpha_k} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_1}$ *устанавливает взаимно однозначное соответствие между* $\mathscr{M} \setminus \widetilde{\mathscr{M}}$ *и* $\mathscr{M}' \setminus \widetilde{\mathscr{M}}'$.

Эта теорема показывает, что, зная классификацию неразложимых объектов для ориентации Λ, мы можем легко провести такую классификацию для ориентации Λ'; иначе говоря, задачи, получающиеся друг из друга при переворачивании части стрелок, в каком-то смысле эквивалентны.

Как показывают примеры, аналогичное утверждение верно для графов с циклами, но доказывать его мы не умеем.

Доказательство теоремы 1.2. Ясно, что п. 2) сразу следует из п. 1) и следствия 1.1. Докажем п. 1).

Достаточно рассмотреть случай, когда ориентации Λ и Λ' отличаются только на одном ребре l. Граф $\Gamma \setminus l$ распадается на две связные компоненты. Пусть Γ' та из них, которая содержит вершину $\beta(l)$ ($\beta(l)$ берется в соответствии с ориентацией Λ). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — такая нумерация вершин графа Γ', что для любого ребра $l' \in \Gamma'_1$ номер вершины $\alpha(l')$ больше номера $\beta(l')$. (Такая нумерация существует, так как Γ'—граф без циклов). Легко идеть, что последовательность вершин $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ является искомой (т. е. она (+) допустима и $\sigma_{\alpha_k} \cdot \ldots \cdot \sigma_{\alpha_1}\Lambda = \Lambda'$). Теорема 1.2 доказана.

Обычно бывает удобно пользоваться некоторой комбинацией функторов $F^\pm_\alpha$, которая переводит категорию $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ в себя.

Определение 1.2. Пусть (Γ, Λ)—ориентированный граф без ориентированных циклов. Выберем такую нумерацию $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вершин графа Γ, что для любого ребра $l \in \Gamma_1$ номер вершины $\alpha(l)$ больше номера вершины $\beta(l)$. Положим $\Phi^+ = F^+_{\alpha_n} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_2}F^+_{\alpha_1}$, $\Phi^- = F^-_{\alpha_1} \cdot F^-_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot F^-_{\alpha_n}$. Функторы Φ^+ и Φ^- мы будем называть *функторами Кокстера.*

[1]) Там, где это не приводит к недоразумениям, мы обозначаем одним и тем же символом L_α неприводимые объекты во всех категориях $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$, опуская указание ориентации Λ.

Лемма 1.2. 1) *Последовательность* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (+) *допустима*, $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ —(—) *допустима*. 2) *Функторы* Φ^+, Φ^- *переводят категорию* $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ *в себя*. 3) Φ^+ *и* Φ^- *не зависят от произвола в выборе нумерации вершин*.

Доказательство 1), 2) — ясно. Докажем п. 3). Проведем доказательство для функтора Φ^+. Заметим сначала, что если две различные вершины $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$ не соединены ребром и (+) допустимы относительно некоторой ориентации, то функторы $F^+_{\gamma_1}$ и $F^+_{\gamma_2}$ коммутируют (т. е. $F^+_{\gamma_2}F^+_{\gamma_1} = F^+_{\gamma_1}F^+_{\gamma_2}$).

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ — две подходящие нумерации и пусть $\alpha_1 = \alpha'_m$. Тогда вершины $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{m-1}$ не соединены с α_1 ребром (если α_1 и α'_i ($i < m$) соединены ребром l, то $\alpha(l) = \alpha'_m = \alpha_1$ в силу выбора нумерации $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$, но это противоречит выбору нумерации $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Поэтому $F^+_{\alpha'_m} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha'_1} = F^+_{\alpha'_{m-1}} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha'_1} F^+_{\alpha_1}$. Проведя аналогичное рассуждение с α_2, затем с α_3 и т. д., мы докажем, что $F^+_{\alpha'_n} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha'_1} = F^+_{\alpha_n} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_1}$.

Для функтора Φ^- доказательство аналогично.

Следуя [2], можно ввести следующее определение.

Определение 1.3. Пусть (Γ, Λ) — ориентированный граф без ориентированных циклов. Назовем объект $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ (+) (соответственно (—)) нерегулярным, если для некоторого k $(\Phi^+)^k V = 0$ $((\Phi^-)^k V = 0)$. Назовем объект V регулярным, если для всех k $V \approx (\Phi^-)^k(\Phi^+)^k V \approx (\Phi^+)^k(\Phi^-)^k V$.

Замечание 1. Используя морфизмы p^α_V и i^β_V, введенные при доказательстве теоремы 1.1, можно построить канонические эпиморфизм $p^k_V\colon V \to (\Phi^+)^k(\Phi^-)^k V$ и мономорфизм $i^k_V\colon (\Phi^-)^k(\Phi^+)^k V \to V$. Объект V регулярен тогда и только тогда, когда при всех k эти морфизмы являются изоморфизмами.

Замечание 2. Если объект V аннулируется функтором $F^+_{\alpha_s} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_1}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — некоторая (+) допустимая последовательность), то этот объект (+) нерегулярен. Более того, последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ можно так продолжить $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_m$, что $F^+_{\alpha_m} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_{s+1}} \cdot F^+_{\alpha_s} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_1} = (\Phi^+)^s$.

Теорема 1.3. *Пусть* (Γ, Λ) — *ориентированный граф без ориентированных циклов. Тогда* 1) *Каждый неразложимый объект* $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ *либо регулярен либо нерегулярен*. 2) *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *такая нумерация вершин графа* Γ, *что для любого* $l \in \Gamma_1$ *номер* $\alpha(l)$ *больше номера* $\beta(l)$. *Положим* $V_i = F^-_{\alpha_1}F^-_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot F^-_{\alpha_{i-1}}(L_{\alpha_i}) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$, $\hat{V}_i = F^+_{\alpha_n} \cdot \ldots \cdot F^+_{\alpha_{i+1}}(L_{\alpha_i}) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ (*здесь* $1 \leqslant i \leqslant n$). *Тогда* $\Phi^+(V_i) = 0$ *и любой неразложимый объект* $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$, *для которого* $\Phi^+(V) = 0$, *изоморфен одному из объектов* V_i. *Аналогично* $\Phi^-(\hat{V}_i) = 0$, *и, если* V *неразложим и* $\Phi^-(V) = 0$, *то* $V \approx \hat{V}_i$ *для некоторого* i. 3) *Каждый* (+) (*соответственно* (—)) *нерегулярный неразложимый объект* V *имеет вид* $(\Phi^-)^k V_i$ (*соответственно* $(\Phi^+)^k \hat{V}_i$) *для некоторых* i, k.

Теорема 1.3 сразу вытекает из следствия 1.1.

С помощью этой теоремы можно, так же как это сделано в [2] для классификации четверок подпространств, отделить «простые» объекты (нерегулярные) от более «сложных» (регулярных); для исследования регулярных объектов нужны другие методы.

§ 2. Графы, группы Вейля и преобразования Кокстера

В этом параграфе мы введем определения группы Вейля, корней, преобразования Кокстера и докажем нужные нам для дальнейшего результаты. Отметим два отличия нашего изложения от общепринятого.

а) У нас встречаются только схемы Дынкина с однократными стрелками.

б) В случае графов с кратными ребрами мы получаем более широкий класс групп, чем, например, в [7].

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть Γ — граф без петель.

1) Обозначим через $\mathscr{E}_\Gamma$ линейное пространство над $\mathbf{Q}$, состоящее из наборов $x = (x_\alpha)$ рациональных чисел x_α $(\alpha \in \Gamma_0)$.

Для каждого $\beta \in \Gamma_0$ обозначим через $\overline{\beta}$ вектор в $\mathscr{E}_\Gamma$ такой, что $(\overline{\beta})_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $(\overline{\beta})_\beta = 1$.

Вектор $x = (x_\alpha)$ мы будем называть *целочисленным*, если $x_\alpha \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in \Gamma_0$.

Вектор $x = (x_\alpha)$ мы будем называть *положительным* (обозначение $x > 0$), если $x \neq 0$ и $x_\alpha \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Gamma_0$.

2) Обозначим через B квадратичную форму на пространстве $\mathscr{E}_\Gamma$, определяемую формулой $B(x) = \sum\limits_{\alpha \in \Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum\limits_{l \in \Gamma_1} x_{\gamma_1(l)} \cdot x_{\gamma_2(l)}$, где $x = (x_\alpha)$, $\gamma_1(l)$ и $\gamma_2(l)$ — концы ребра l. Обозначим через $\langle\, ,\rangle$ соответствующую симметричную билинейную форму.

3) Для каждого $\beta \in \Gamma_0$ обозначим через σ_β линейное преобразование в пространстве $\mathscr{E}_\Gamma$, задаваемое формулами $(\sigma_\beta x)_\gamma = x_\gamma$ при $\gamma \neq \beta$, $(\sigma_\beta x)_\beta = -x_\beta + \sum\limits_{l \in \Gamma^\beta} x_{\gamma(l)}$, где $\gamma(l)$ — конец ребра l, отличный от точки β.

Обозначим через W полугруппу преобразований пространства $\mathscr{E}_\Gamma$, порожденную преобразованиями σ_β $(\beta \in \Gamma_0)$.

Л е м м а 2.1. 1) *Если* $\alpha, \beta \in \Gamma_0$, $\alpha \neq \beta$, *то* $\langle\overline{\alpha}, \overline{\alpha}\rangle = 1$, $2\langle\overline{\alpha}, \overline{\beta}\rangle = -$ *число ребер, соединяющих* α *и* β. 2) *Пусть* $\beta \in \Gamma_0$. *Тогда* $\sigma_\beta(x) = x - 2\langle\overline{\beta}, x\rangle\overline{\beta}$, $\sigma_\beta^2 = 1$. *В частности, W является группой.* 3) *Группа W сохраняет целочисленную решетку в $\mathscr{E}_\Gamma$ и сохраняет квадратичную форму B.* 4) *Если форма B положительно определена* (*т. е.* $B(x) > 0$ *при* $x \neq 0$), *то группа W конечна.*

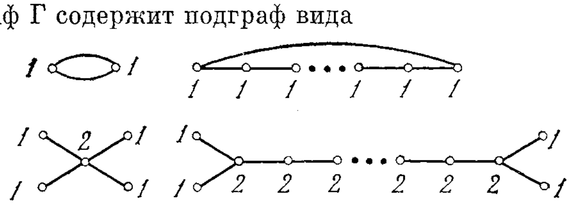
Д о к а з а т е л ь с т в о. 1), 2), 3) проверяются непосредственно; 4) следует из 3).

Для доказательства теоремы Габриеля интересен случай, когда форма B — положительно определена.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Форма B положительно определена для графов* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 *и только для них* (см. [7], глава VI).

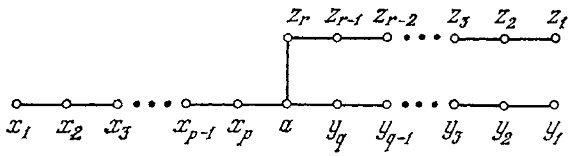
Дадим набросок доказательства этого утверждения.

1. Если граф Γ содержит подграф вида

(*) 

то форма B не будет положительно определенной, так как, дополнив нулями числа, проставленные в вершинах на рисунке (*), мы получим вектор $x \in \mathscr{E}_\Gamma$, для которого $B(x) \leqslant 0$. Значит, если форма B положительно определена, граф Γ имеет вид

(**)



где p, q, r — некоторые числа, $p, q, r \geqslant 0$.

2. Для каждого неотрицательного целого числа p рассмотрим квадратичную форму от $(p+1)$ переменного $x_1, \ldots, x_{p+1}$

$$C_p(x_1, \ldots, x_{p+1}) = -x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_px_{p+1} + x_1^2 + \ldots + x_p^2 + \frac{p}{2(p+1)}x_{p+1}^2.$$

Эта форма неотрицательно определена и размерность пространства ее нулей равна 1. Кроме того, у любого вектора $x \neq 0$, для которого $C_p(x)=0$, все координаты отличны от 0.

Для доказательства этих фактов достаточно переписать $C_p(x)$ в виде

$$C_p(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{i}{2(i+1)}\left(x_{i+1} - \frac{i+1}{i}x_i\right)^2.$$

3. Расставим числа $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r, a$ на вершинах графа Γ в соответствии с рисунком (**). Тогда

$$B(x_i, y_i, z_i, a) = C_p(x_1, \ldots, x_p, a) + C_q(y_1, \ldots, y_q, a) + \\ + C_r(z_1, \ldots, z_r, a) + \left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)}\right)a^2.$$

Отсюда ясно, что форма B положительно определена тогда и только тогда, когда $\frac{p}{2(p+1)} + \frac{q}{2(q+1)} + \frac{r}{2(r+1)} < 1$, т. е. $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1$.

4. Можно считать, что $p \leqslant q \leqslant r$. Разберем возможные случаи.

а) $p=0$, q, r — любые. $A = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1$, т. е. форма B положительно определена (серия A_n).

б) $p=1$, $q=1$, r — любое. $A > 1$ (серия D_n),
в) $p=1$, $q=2$, $r=2, 3, 4$. $A > 1$ (E_6, E_7, E_8),
г) $p=1$, $q=2$, $r \geqslant 5$. $A \leqslant 1$,
$p=1$, $q=3$, $r \geqslant 3$. $A \leqslant 1$,
$p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$, $r \geqslant 2$. $A \leqslant 1$.

Итак, форма B положительно определена для графов A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и только для них.

Определение 2.2. Вектор $x \in \mathscr{E}_\Gamma$ называется *корнем*, если для некоторых $\beta \in \Gamma_0$, $w \in W$ имеем $x = w\overline{\beta}$. Векторы $\overline{\beta}$ ($\beta \in \Gamma_0$) называются *простыми корнями*. Корень x называется *положительным*, если $x > 0$ (см. определение 2.1).

Лемма 2.2. 1) *Если* x — *корень, то* x — *целочисленный вектор и* $B(x)=1$. 2) *Если* x *корень, то* $(-x)$—*корень.* 3) *Если* x *корень, то либо* $x>0$ *либо* $(-x)>0$.

Доказательство. Пункт 1) следует из леммы 2.1; 2) следует из того, что $\sigma_\alpha(\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}$ для всех $\alpha \in \Gamma_0$.

Пункт 3) нам понадобится только для того случая, когда форма B положительно определена. Поэтому мы докажем его только в этом случае.

Можно записать корень x в виде $\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\alpha_k}\bar{\beta}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta\in\Gamma_0$. Поэтому достаточно показать, что, если корень $y>0$ и $\alpha\in\Gamma_0$, то либо $\sigma_\alpha y>0$ либо $y=\bar{\alpha}$ (и $-\sigma_\alpha y=+\bar{\alpha}>0$).

Поскольку $\|y\|=\|\bar{\alpha}\|=1$, то $|\langle\bar{\alpha}, y\rangle|\leqslant 1$. Кроме того, $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle\in\mathbf{Z}$. Значит, $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle$ принимает одно из пяти значений $2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$.

а) $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle=2$. Тогда $\langle\bar{\alpha}, y\rangle=1$, т. е. $y=\bar{\alpha}$.

б) $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle\leqslant 0$. Тогда $\sigma_\alpha(y)=y-2\langle\bar{\alpha}, y\rangle\bar{\alpha}>0$.

в) $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle=1$. Поскольку $2\langle\bar{\alpha}, y\rangle=2y_\alpha-\sum\limits_{l\in\Gamma^\alpha} y_{\gamma(l)}$ ($\gamma(l)$—другой конец ребра l), то $y_\alpha>0$, т. е. $y_\alpha\geqslant 1$. Поэтому $\sigma_\alpha y=y-\bar{\alpha}>0$.

Лемма 2.2 доказана.

Определение 2.3. Пусть Γ — граф без петель, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторая нумерация его вершин. *Преобразованием Кокстера* называется элемент группы W $c=\sigma_{\alpha_n}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\alpha_1}$ (c зависит от выбора нумерации).

Лемма 2.3. *Если форма* B *для графа* Γ *положительно определена, то*

1) *Преобразование* c *в пространстве* $\mathscr{E}_\Gamma$ *не имеет ненулевых инвариантных векторов.*

2) *Если* $x\in\mathscr{E}_\Gamma$, $x\neq 0$, *то для некоторого* i *вектор* $c^i x$ *не положителен.*

Доказательство. 1) Пусть $y\in\mathscr{E}_\Gamma$, $y\neq 0$ и $cy=y$. Поскольку преобразования $\sigma_{\alpha_n}, \sigma_{\alpha_{n-1}}, \ldots, \sigma_{\alpha_2}$ не меняют координаты, соответствующей α_1 (т. е. для любого $z\in\mathscr{E}_\Gamma$ $(\sigma_{\alpha_i}z)_{\alpha_1}=z_{\alpha_1}$ при $i\neq 1$), то $(\sigma_{\alpha_1}y)_{\alpha_1}=(cy)_{\alpha_1}=y_{\alpha_1}$. Значит, $\sigma_{\alpha_1}y=y$. Аналогично доказывается, что $\sigma_{\alpha_2}y=y$, затем $\sigma_{\alpha_3}y=y$ и т. д.

Для всех $\alpha\in\Gamma_0$ $\sigma_\alpha y=y-2\langle\bar{\alpha}, y\rangle\bar{\alpha}=y$, т. е. $\langle\bar{\alpha}, y\rangle=0$. Так как векторы $\bar{\alpha}$ $(\alpha\in\Gamma_0)$ образуют базис в $\mathscr{E}_\Gamma$, а форма B невырождена, то $y=0$.

2) Поскольку группа W конечна, для некоторого h имеем $c^h=1$. Если все векторы $x, cx, \ldots, c^{h-1}x$ положительны, то вектор $y=x+cx+\ldots+c^{h-1}x$ отличен от 0. При этом $cy=y$, что противоречит п. 1).

§ 3. Теорема Габриеля

Пусть (Γ, Λ) — ориентированный граф. Для каждого объекта $V\in\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ набор размерностей $\dim V_\alpha$ мы будем рассматривать как вектор из $\mathscr{E}_\Gamma$ и обозначать через $\dim V$.

Теорема 3.1 (Габриель [1]). 1) *Если в категории* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ *имеется лишь конечное число неизоморфных неразложимых объектов, то граф* Γ *совпадает с одним из графов* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

2) *Пусть* Γ — *граф одного из типов* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, Λ — *некоторая его ориентация. Тогда в категории* $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ *имеется конечное число неизоморфных неразложимых объектов. При этом отображение* $V \mapsto \dim V$ *устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных неразложимых объектов и положительными корнями в* $\mathscr{E}_\Gamma$.

Сначала приведем принадлежащее Титсу доказательство первой части теоремы.

Доказательство Титса. Рассмотрим объекты $(V, f) \in \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ с фиксированной размерностью $\dim V = m = (m_\alpha)$.

Если фиксировать в каждом из пространств V_α базис, то объект (V, f) полностью задается набором матриц A_l $(l \in \Gamma_1)$, где A_l — матрица отображения $f_l\colon V_{\alpha(l)} \to V_{\beta(l)}$. Произведем в каждом пространстве V_α замену базиса при помощи невырожденной матрицы g_α размера $m_\alpha \times m_\alpha$. Тогда матрицы A_l заменятся на матрицы

$$(*) \qquad A_l' = g_{\beta(l)}^{-1} A_l \, g_{\alpha(l)}.$$

Пусть A — многообразие всех наборов матриц A_l $(l \in \Gamma_1)$, G — группа всех наборов невырожденных матриц g_α $(\alpha \in \Gamma_0)$. Тогда группа G действует на A по формуле $(*)$; ясно, что два объекта из $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ с заданной размерностью m изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им наборы матриц $\{A_l\}$ лежат на одной орбите группы G.

Если в категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ лишь конечное число неразложимых объектов, то имеется лишь конечное число неизоморфных объектов размерности m. Поэтому многообразие A разбивается на конечное число орбит группы G. Отсюда следует [1]), что $\dim A \leqslant \dim G - 1$ (-1 появляется за счет того, что в G есть одномерная подгруппа $G_0 = \{g(\lambda) \mid \lambda \in K^*\}$, $g(\lambda)_\alpha = \lambda \cdot 1_{V_\alpha}$, которая действует на A тождественно). Ясно, что $\dim G = \sum\limits_{\alpha \in \Gamma_0} m_\alpha^2$, $\dim A = \sum\limits_{l \in \Gamma_1} m_{\alpha(l)} m_{\beta(l)}$.

Поэтому условие $\dim A \leqslant \dim G - 1$ можно переписать в виде [2]) $B(m) > 0$ (если $m \neq 0$). Кроме того, легко проверить, что $B((x_\alpha)) \geqslant B((|x_\alpha|))$ для всех $x = (x_\alpha) \in \mathscr{E}_\Gamma$.

Таким образом, мы показали, что если в категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ конечное число неразложимых объектов, то форма B в пространстве $\mathscr{E}_\Gamma$ положительно определена.

Как показано в предложении 2.1, это выполнено только для графов A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

Докажем теперь вторую часть теоремы Габриеля.

Лемма 3.1. *Пусть* (Γ, Λ) — *ориентированный граф, вершина* $\beta \in \Gamma_0$ $(+)$ *допустима относительно ориентации* Λ *и* $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — *неразложимый*

---

[1]) Это рассуждение годится только для бесконечного поля K. В случае, когда $K = \mathbf{F}_q$ — конечное поле, надо воспользоваться тем, что число неизоморфных объектов размерности m растет не быстрее, чем полином от m, а число орбит группы G на многообразии A не меньше, чем $C \cdot q^{\dim A - (\dim G - 1)}$.

[2]) Ясно, что мы можем ограничиться рассмотрением графов без петель.

объект. Тогда либо $F_\beta^+(V)$ — неразложимый объект и $\dim F_\beta^+(V)=\sigma_\beta(\dim V)$, *либо* $V=L_\beta$, $F_\beta^+(V)=0$, $\dim F_\beta^+(V)\neq\sigma_\beta(\dim V)<0$. *Аналогичное утверждение выполнено для* $(-)$ *допустимой вершины* α *и функтора* F_α^-.

Эта лемма является переформулировкой теоремы 1.1.

Следствие 3.1. *Пусть последовательность вершин* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(+)$ *допустима относительно ориентации* Λ, $V\in\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — *неразложимый объект. Положим* $V_j=F_{\alpha_j}^+F_{\alpha_{j-1}}^+\cdot\ldots\cdot F_{\alpha_1}^+V$, $m_j=\sigma_{\alpha_j}\sigma_{\alpha_{j-1}}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\alpha_1}(\dim V)$ $(0\leqslant j\leqslant k)$. *Пусть* i — *последний такой индекс, что* $m_j>0$ *при* $j\leqslant i$. *Тогда при* $j\leqslant i$ V_j — *неразложимые объекты, причем* $V=F_{\alpha_1}^-\cdot\ldots\cdot F_{\alpha_j}^-V_j$. *Если* $i<k$, *то* $V_{i+1}=V_{i+2}=\ldots=V_k=0$, $V_i=L_{\alpha_{i+1}}$, $V=F_{\alpha_1}^-\cdot\ldots\cdot F_{\alpha_i}^-(L_{\alpha_{i+1}})$. *Аналогичные утверждения верны при замене* $(+)$ *на* $(-)$.

Покажем теперь, что в случае графа Γ типа A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (т. е. в случае, когда форма B положительно определена) неразложимые объекты соответствуют положительным корням.

а) Пусть $V\in\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — неразложимый объект.

Выберем нумерацию $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вершин графа Γ так, чтобы для любого ребра $l\in\Gamma_1$ вершина $\alpha(l)$ имела номер больше, чем $\beta(l)$. Пусть $c=\sigma_{\alpha_n}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\alpha_1}$ — соответствующее преобразование Кокстера.

Согласно лемме 2.3 для некоторого k вектор $c^k(\dim V)\in\mathscr{E}_\Gamma$ не положителен.

Если рассмотреть $(+)$ допустимую последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{nk}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (k раз), то имеем $\sigma_{\beta_{nk}}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_1}(\dim V)=c^k(\dim V)\not>0$. Из следствия 3.1 вытекает, что найдется такой индекс $i<kn$ (зависящий только от $\dim V$), что объект $V=F_{\beta_1}^-\cdot F_{\beta_2}^-\cdot\ldots\cdot F_{\beta_i}^-(L_{\beta_{i+1}})$, $\dim V=\sigma_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_i}(\overline{\beta}_{i+1})$. Отсюда следует, что $\dim V$ — положительный корень, причем V определяется по вектору $\dim V$.

б) Пусть x — положительный корень.

В силу леммы 2.3 $c^kx\not>0$ для некоторого k. Рассмотрим $(+)$ допустимую последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{nk}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (k раз). Тогда $\sigma_{\beta_{nk}}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_1}(x)=c^k(x)\not>0$. Пусть i — последний индекс, для которого $\sigma_{\beta_i}\sigma_{\beta_{i-1}}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_1}(x)>0$. Как видно из доказательства леммы 2.2 п. 3), $\sigma_{\beta_i}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_1}(x)=\overline{\beta}_{i+1}$.

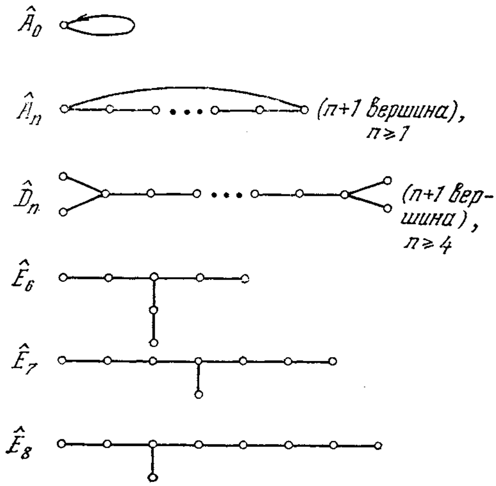
Из следствия 3.1 вытекает, что $V=F_{\beta_1}^-F_{\beta_2}^-\cdot\ldots\cdot F_{\beta_i}^-(L_{\beta_{i+1}})\in\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — неразложимый объект, причем $\dim V=\sigma_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\beta_i}(\overline{\beta}_{i+1})=x$.

Доказательство теоремы Габриеля закончено.

Замечание 1. В случае, когда форма B положительно определена, множество корней совпадает с множеством целочисленных векторов $x\in\mathscr{E}_\Gamma$, для которых $B(x)=1$ (это легко усмотреть из леммы 2.3 и доказательства леммы 2.2).

Замечание 2. Интересно рассмотреть категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$, для которых канонический вид объекта размерности m зависит меньше, чем от $C\cdot|m|^2$ параметров (здесь $|m|=\sum|m_\alpha|$, $\alpha\in\Gamma_0$). Из приведенного доказательства видно, что для этого необходимо, чтобы форма B была неотрицательно определенной.

Аналогично предложению 2.1 можно показать, что форма B неотрицательно определена у графов A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и $\hat{A}_0$, $\hat{A}_n$, $\hat{D}_n$, $\hat{E}_6$, $\hat{E}_7$, $\hat{E}_8$, где



(графы $\hat{A}_n$, $\hat{D}_n$, $\hat{E}_6$, $\hat{E}_7$, $\hat{E}_8$ являются расширенными схемами Дынкина (см. [7])).

В недавней работе Л. А. Назаровой дана классификация неразложимых объектов для этих графов. Кроме того, там показано, что такая классификация для остальных графов содержит в себе классификацию пары некоммутирующих операторов (т. е. в некотором смысле дать такую классификацию невозможно).

§ 4. Некоторые открытые вопросы

Пусть Γ — конечный связный граф без петель, Λ — некоторая его ориентация.

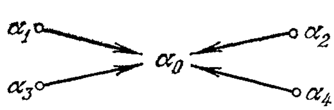
Гипотеза. 1) Пусть $x \in \mathscr{E}_\Gamma$ — целочисленный вектор, $x > 0$, $B(x) > 0$ и x — не корень. Тогда любой объект $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$, для которого $\dim V = x$, разложим.

2) Если x — положительный корень, то существует ровно один (с точностью до изоморфизма) неразложимый объект $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$, для которого $\dim V = x$.

3) Если V — неразложимый объект в $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ и $B(\dim V) \leqslant 0$, то существует бесконечное число неизоморфных неразложимых объектов $V' \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ с $\dim V' = \dim V$ (мы считаем, что поле K бесконечно).

4) Если Λ и Λ' — две ориентации графа Γ, $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$ — неразложимый объект, то существует неразложимый объект $V' \in \mathscr{L}(\Gamma, \Lambda')$ такой, что $\dim V' = \dim V$.

Проиллюстрируем эту гипотезу на примере графа (Γ, Λ)



(четверка подпространств).

Для каждого $x \in \mathscr{E}_\Gamma$ положим $\rho(x) = -2\langle\bar{\alpha}_0, x\rangle$ (если $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, то $\rho(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_0$).

В работе [2] описаны все неразложимые объекты в категории $\mathscr{L}(\Gamma, \Lambda)$. Они бывают следующих типов.

1. Нерегулярные неразложимые объекты (см. конец § 1). Такие объекты однозначно соответствуют положительным корням x с $\rho(x) \neq 0$.

2. Регулярные неразложимые объекты V, для которых $B(\dim V) \neq 0$. Эти объекты однозначно соответствуют положительным корням x, для которых $\rho(x) = 0$.

3. Регулярные объекты V, для которых $B(\dim V) = 0$. В этом случае $\dim V$ имеет вид $\dim V = (2n, n, n, n, n)$, $\rho(\dim V) = 0$. Неразложимые объекты с фиксированной размерностью $m = (2n, n, n, n, n)$ зависят от одного параметра. При этом если $m \in \mathscr{E}_\Gamma$ такой целочисленный вектор, что $m > 0$ и $B(m) = 0$, то m имеет вид $m = (2n, n, n, n, n)(n > 0)$ и существуют неразложимые объекты V с $\dim V = m$.

Если f — линейное преобразование в n-мерном пространстве, состоящее из одной жордановой клетки, то соответствующая ему четверка подпространств (см. введение) будет четверкой 3-го типа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math. 6 (1972), 71—103.

[2] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space, Colloquia Mathematica Societatis Ianos. Bolyai, 5 Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970, 163—237. (Краткое изложение см. ДАН 197:4 (1971), 762—765.)

[3] Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, Представления частично упорядоченных множеств, Сб. «Исследования по теории представлений», Ленинград, «Наука», 1972, 5—31.

[4] I. Gelfand, The Cohomology of Infinite dimensional Lie Algebras, Actes Congrès Intern. Math. 1 (1970), 95—111.

[5] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, Неразложимые представления группы Лоренца, УМН 23:3 (1968), 3—60.

[6] Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., «Наука», 1969.

[7] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли, М., «Мир», 1972.

Поступило в редакцию 18 декабря 1972 г.