УДК 519.48

# Строение наследственных колец

**Ю. А. Дрозд (Киев)**

В последнее время теории наследственных колец посвящено много работ целого ряда авторов. Это связано, вероятно, с «естественностью» задачи: наследственные кольца в гомологической классификации идут непосредственно за полупростыми, а в то же время здесь возникают довольно сложные классы колец и специфические трудности, отсутствующие в полупростом случае. По-видимому, первый значительный результат о строении наследственных колец получил М. Харада [1], который показал, что полупримарные наследственные кольца изоморфны некоторым кольцам (обобщенно) треугольных матриц с простыми артиновыми блоками по диагонали. Смолл [2], используя кольца частных, распространил «треугольное представление» Харады на нётеровы справа наследственные кольца. Здесь по диагонали уже стоят первичные кольца. Наконец, Чэттерс [3] доказал, что двусторонне нётерово наследственное кольцо разлагается в прямое произведение артинова и нескольких первичных колец.

Настоящая работа посвящена структурным теоремам для наследственных колец с очень слабым ограничением конечности: существованием примитивного разложения единицы. В § 1 доказывается, что при этом ограничении наследственное кольцо изоморфно кольцу треугольных матриц с первичными кольцами по диагонали. В § 2, комбинируя критерий наследственности Харады (для полупримарных колец) с одним результатом Палмера и Рооса [4], мы даем критерий наследственности треугольного кольца. Из этих теорем в § 3 сравнительно легко выводятся результаты Харады, Смолла (вместе с одним уточнением для двусторонне наследственных колец) и Чэттерса. В § 4 к изучению строения наследственных колец применяется техника тензорных алгебр. Здесь вводится понятие «вида», обобщающее соответствующее понятие, данное Габриелем [5] для артиновых колец, и доказывается, что при выполнении одного условия («расщепляемости») наследственные кольца изоморфны тензорным алгебрам некоторых специальных видов. Отметим, что техника видов хорошо зарекомендовала себя, в частности, при изучении модулей над наследственными кольцами (см., например, [5], [6]).

Все перечисленные результаты, с соответствующими изменениями, переносятся и на полунаследственные кольца. Большая часть этих результатов была анонсирована автором в докладе [7].

## § 1. Треугольность наследственного кольца

В настоящей работе слово «кольцо» всегда будет означать ассоциативное кольцо с единицей, «гомоморфизм колец» — гомоморфизм, переводящий единицу в единицу. Все модули предполагаются унитальными, причем слово «модуль», если не оговорено противное, означает правый модуль. Соответственно термины «нётеровость», «артиновость», «наследственность» и т. п., если не оговорено противное, означают нётеровость, артиновость, наследственность и т. п. справа. С другой стороны, «идеал» всегда будет означать двусторонний идеал. Разложением единицы кольца $A$ назовем равенство вида $1=e_1+\ldots+e_n$, где $e_i$ — попарно ортогональные идемпотенты. Идемпотент $e\in A$ назовем примитивным (локальным, первичным), если в кольце $eAe$ нет нетривиальных идемпотентов (соответственно если $eAe$ локально или первично). Разложение единицы $1=e_1+\ldots+e_n$ назовем примитивным (локальным, первичным, центральным), если таковыми являются все идемпотенты $e_i$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что *во всех рассматриваемых кольцах есть примитивное разложение единицы*. Очевидно, это равносильно тому, что регулярный $A$-модуль (т. е. само $A$, рассмотренное как $A$-модуль) разлагается в прямую сумму неразложимых модулей. В частности, такими являются все кольца, конечномерные в смысле Голди [8] (например, артиновы или нётеровы), а также все полусовершенные кольца (напомним, что полусовершенное кольцо — это такое кольцо, в котором есть даже локальное разложение единицы [8]). Известны примеры наследственных колец, не удовлетворяющих этому условию (см. [9]). Главными $A$-модулями назовем конечнопорожденные проективные неразложимые модули.

Разложение единицы $1=e_1+\ldots+e_n$ назовем треугольным, если $e_iAe_j=0$ при $i>j$. Кольцо $A$ назовем треугольным, если в нем есть треугольное первичное разложение единицы. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 1. *Полунаследственное кольцо треугольно.*

Доказательство. Из полунаследственности кольца $A$ непосредственно вытекает, что если $P$ — главный, а $Q$ — проективный $A$-модули, то всякий ненулевой гомоморфизм $f: P\to Q$ есть мономорфизм. Поэтому можно ввести отношение квазипорядка $\leqslant$ для главных $A$-модулей, считая $P\leqslant Q$, если $\mathrm{Hom}_A(P, Q)\neq 0$. Если одновременно $P\leqslant Q$ и $Q\leqslant P$, будем писать $P\sim Q$ и называть модули $P$ и $Q$ эквивалентными.

Разложим регулярный $A$-модуль в прямую сумму главных, расположив слагаемые в «невозрастающем» порядке: $A=\bigoplus_{k=1}^{m} P_k$, причем из $P_i<P_j$ следует $i<j$. Объединяя эквивалентные слагаемые, получим разложение $A=\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$, где $Q_i$ — прямая сумма эквивалентных неразложимых модулей и $\mathrm{Hom}_A(Q_j, Q_i)=0$ при $i>j$. Пусть $1=e_i+\ldots+e_n$ — то разложение единицы, для которого $Q=e_iA$. Оно треугольно, так как $e_iAe_j\simeq \simeq \mathrm{Hom}_A(Q_j, Q_i)=0$ при $i>j$, так что остается проверить первичность колец $A_i=e_iAe_i\simeq\mathrm{Hom}_A(Q_i, Q_i)$.

Из [10] следует, что кольца $A_i$ полунаследственные. Кроме того, если $Q_i=\bigoplus\limits_{j=1}^{t} P_{ij}$, где $P_{ij}\sim P_{ik}$ для любых $j$, $k$, то, полагая $\overline{P}_{ik}=P_{ik}e_i$, мы получим разложение регулярного $A_i$-модуля в прямую сумму неразложимых эквивалентных модулей: $A_i=\bigoplus\limits_{j=1}^{t}\overline{P}_{ij}$, поскольку $\mathrm{Hom}_{A_i}(\overline{P}_{ij}, \overline{P}_{ik})\simeq \simeq\mathrm{Hom}_A(P_{ij}, P_{ik})\simeq f_kAf_j$, где $f_k$ и $f_j$ — такие идемпотенты из $A_i$, что $P_{ij}= =f_jA$, а $P_{ik}=f_kA$. Поэтому остается доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Если $A$ — полунаследственное кольцо, то следующие условия равносильны*:

1) *$A$ первично*;

2) *$A=\bigoplus\limits_{i=1}^{m} P_i$, где $P_i$ — эквивалентные главные модули*;

3) *все главные $A$-модули эквивалентны.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из доказанного выше: иначе в $A$ есть треугольное разложение единицы $1=e_1+\ldots+e_n$ $(n\geqslant 2)$, а тогда идеал $I=\sum\limits_{i<j} e_iAe_j$ нильпотентен; если же $I=0$, то $A_i=e_iAe_i$ — идеалы в $A$ и $A_iA_j=0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Если $P$ — проектный $A$-модуль, то $\mathrm{Hom}_A(P, A)\neq 0$ и $\mathrm{Hom}_A(A, P)\neq 0$. Если $P$ главный, отсюда следует, что найдутся два номера, $i$ и $j$ (не обязательно различные), для которых $P_i\leqslant P\leqslant P_j$. Но $P_j\leqslant P_i$, значит, $P\sim P_i$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $I$ и $J$ — ненулевые идеалы в $A$. Найдутся главные модули $P$ и $Q$, для которых $PJ\neq 0$ и $\mathrm{Hom}_A(Q, I)\neq 0$. Поскольку $P\leqslant Q$, тогда и $\mathrm{Hom}_A(P, I)\neq 0$, значит, существует мономорфизм $f: P\to I$, откуда $IJ\supset f(P)J=f(PJ)\neq 0$. Следовательно, $A$ первично.

Из теоремы 1 легко выводится аналог теоремы Веддербарна — Мальцева для полунаследственных колец. Точнее, для всех треугольных колец справедлив следующий результат.

Предложение. 1. *Пусть $A$ — треугольное кольцо (например, полунаследственное), $N$ — его первичный радикал* [8]. *Тогда $N$ нильпотентен и в $A$ содержится такое подкольцо $\bar{A}$, что $A=\bar{A}\oplus N$. Кроме того, $\bar{A}$ есть прямое произведение первичных колец и, если $B$ — другое подкольцо в $A$ такое, что $A=B\oplus N$, то $\bar{A}$ и $B$ унипотентно сопряжены, т. е. $B= =u^{-1}\bar{A}u$, где $u\in 1+N$. Если $A$ полунаследственно (наследственно), то и $\bar{A}$ полунаследственно (наследственно).*

Доказательство. Пусть $1=e_1+\ldots+e_n$ — треугольное первичное разложение единицы, $A_i=e_iAe_i$, $I=\sum\limits_{i<j} e_iAe_j$. Тогда $I^n=0$, а $A/I\simeq \simeq\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$—полупервичное кольцо. Поэтому $I=N$, и в качестве $\bar{A}$ можно

взять подкольцо $\sum_{i=1}^{n} A_i$. Если $A$ полунаследственно (наследственно), то полунаследственность (наследственность) $\bar{A}$ вытекает из [10]. Остается проверить единственность $\bar{A}$ с точностью до унипотентной сопряженности.

Пусть $B \subset A$ — другое подкольцо, для которого $A = B \oplus N$. Обозначим через $f_i$ образ $e_i$ при естественной проекции $A$ на $B$. Тогда $B = \sum_{i=1}^{n} f_i A f_i$ и $f_i \equiv e_i \pmod N$. В частности, $f_1 = e_1 + x$, где $x \in N$. Поскольку $Ne_1 = 0$, из равенства $f_1^2 = f_1$ получаем $e_1 x = x$ и $x^2 = 0$. Поэтому $e_1(1+x) = f_1 = (1+x) f_1$, т. е. $f_1 = (1+x)^{-1} e_1 (1+x)$. Заменяя $B$ на $(1+x) B (1+x)^{-1}$, можно считать, что $f_1 = e_1$. Тогда $f_2 = e_2 + y$, где $y \in N$, причем $e_1 y = 0$, а потому и $ye_2 = 0$, так как $Ne_2 = e_1 N e_2$. Отсюда аналогично выводится, что $f_2 = (1+y)^{-1} e_2 (1+y)$, причем $(1+y)^{-1} e_1 (1+y) = e_1$. Продолжая этот процесс, мы построим $u \in 1+N$ такой, что $f_i = u^{-1} e_i u$ для всех $i$, а тогда

$$B = \sum_{i=1}^{n} f_i A f_i = u^{-1} \left( \sum_{i=1}^{n} e_i A e_i \right) u = u^{-1} \bar{A} u.$$

Следствие. *Если $1 = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_m$ — два треугольных первичных разложения единицы кольца $A$, то они унипотентно сопряжены, т. е. $m = n$ и индексы можно выбрать так, что $f_i = u^{-1} e_i u$ для всех $i$, где $u \in 1+N$ ($N$ — первичный радикал $A$).*

## § 2. Наследственность треугольных колец

В этом параграфе мы дадим критерий наследственности треугольного кольца. Пусть в кольце $A$ фиксировано некоторое треугольное разложение единицы $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Положим $A_{ij} = e_i A e_j$, $A_i = A_{ii}$, $Q_i = e_i A$. Поскольку $A_i \simeq \mathrm{Hom}_A(Q_i, Q_i)$, естественно рассматривать $Q_i$ как левый $A_i$-модуль. Установим вначале критерий проективности $A$-модулей.

Лемма 2. *Следующие условия равносильны:*

1) *$A$-модуль $P$ проективен;*

2) *$P \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (P_i \otimes_{A_i} Q_i)$, где $P_i$ — проективный $A_i$-модуль;*

3) *для любого $i$ $A_i$-модуль $\bar{P}_i = Pe_i / \sum_{k<i} PA_{ki}$ проективен, а гомоморфизмы $\xi_{ij} : \bar{P}_i \otimes_{A_i} A_{ij} \to Pe_j / \sum_{k<i} PA_{kj}$, индуцированные умножением, мономорфны.*

Доказательство. Если $P_i$ — проективный $A_i$-модуль, то $P_i \otimes_{A_i} Q_i \simeq \bigoplus_{j=i}^{n} P_i \otimes_{A_i} A_{ij}$, а действие операторов из $A$ определяется кольцевым умножением $A_{ik} \otimes_{A_k} A_{kj} \to A_{ij}$. Отсюда сразу следует эквивалентность условий 2) и 3).

2) $\Rightarrow$ 1) следует из [11] (предложение II.5.3).

1) $\Rightarrow$ 2). Положим $N = \sum_{i<j} A_{ij}$, $\bar{A} = \bar{A}/N \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i$. Если $P$ проективен, то проективен и $\bar{A}$-модуль $\bar{P} = P/PN \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bar{P}_i$, т. е. проективны все $A_i$-модули $P_i$. Положим $Q = \bigoplus_{i=1}^{n} (\bar{P}_i \otimes_{A_i} Q_i)$. Это проективный $A$-модуль, причем $Qe_i = \bigoplus_{k=1}^{i} (\bar{P}_k \otimes_{A_k} A_{ki})$, откуда $Q/QN \simeq \bar{P}$. Поскольку $N$ — нильпотентный идеал, отсюда следует $Q \simeq P$.

Следствие. *Всякий главный $A$-модуль изоморфен модулю вида $P \otimes_{A_i} Q_i$, где $P$ — главный $A_i$-модуль.*

Из доказанной леммы уже несложно вывести требуемый критерий наследственности.

Теорема 2. *Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — треугольное разложение единицы кольца $A$; $\bar{A}_{ij} = A_{ij} \Big/ \sum_{i<k<j} A_{ik}A_{kj}$. Для всякого правого идеала $I \subset A_i$ обозначим через $\mu_{ikj}^{I}$ $(i<k<j)$ гомоморфизм*

$$(\bar{A}_{ik}/I\bar{A}_{ik}) \otimes_{A_k} A_{kj} \to A_{ij} \Big/ \Big(IA_{ij} + \sum_{i<l<k} A_{il}A_{lj}\Big),$$

*индуцированный умножением в кольце $A$. Кольцо $A$ наследственно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) *все $A_i$ наследственны;*

б) *$A_{ij}$ — плоские левые $A_i$-модули;*

в) *для любого правого идеала $I \subset A_i$ правые $A_j$-модули $\bar{A}_{ij}/I\bar{A}_{ij}$ проективны;*

г) *все $\mu_{ikj}^{I}$ суть мономорфизмы.*

Доказательство проведем индукцией по $n$. Пусть вначале $n = 2$ *. Если $A$ наследственно, то $A_i$ также наследственны (см. [10]). Кроме того, если $I$—правый идеал в $A_1$, то $I \oplus A_{12}$—подмодуль в $Q_1 = A_1 \oplus A_{12}$. Он должен быть проективным, значит, по лемме 2, $A_{12}/IA_{12}$ — проективный $A_2$-модуль, а $I \otimes_{A_1} A_{12} \to A_{12}$ — мономорфизм, т. е. $A_{12}$ — плоский левый $A_1$-модуль [8]. Итак, выполнены условия а) — в), условие же г) в этом случае пусто.

Наоборот, пусть условия теоремы выполнены. Заметим, что для проверки наследственности $A$ достаточно установить, что всякий подмодуль в каждом $Q_i$ проективен (см. [8]). Но всякий подмодуль в $Q_2 = A_2$ — это правый идеал в $A_2$, а всякий подмодуль в $Q_1 = A_1 \oplus A_{12}$ имеет вид $I \oplus M$, где $I$ — правый идеал в $A_1$, а $M$ — некоторый $A_2$-подмодуль в $A_{12}$, содержащий $IA_{12}$. Из условий а) — в) непосредственно следует , что в обоих случаях выполнено условие 3) леммы 2 (нужно заметить, что $M/IA_{12}$ —

* В этом случае наш критерий легко следует из результата Палмера и Рооса [4], однако мы предпочли дать прямое доказательство, поскольку оно практически без изменений переносится на полунаследственный случай.

это подмодуль в проективном $A_2$-модуле $A_{12}/IA_{12}$, и, ввиду наследственности $A_2$, он также проективен). Значит, все эти подмодули проективны и $A$ наследственно.

В общем случае положим $e=e_1$, $f=e_2+\ldots+e_n$, $B=fAf$, $V=eAf$. Тогда $1=e+f$ — треугольное разложение единицы кольца $A$, а $f=e_2+\ldots+e_n$ — кольца $B$. Ввиду уже разобранного случая, $A$ наследственно тогда и только тогда, когда $A_1$ и $B$ наследственны, $V$—плоский левый $A_1$-модуль и для любого правого идеала $I\subset A_1$ правый $B$-модуль $V/IV$ проективен. Но $V=\bigotimes_{i=2}^{n} A_{1i}$, так что плоскость $V$ равносильна плоскости всех $A_{1i}$. По индукционному предположению можно считать, что наследственность $B$ равносильна выполнению условий а)—г) при $i>1$. Наконец, проективность $V/IV$, ввиду леммы 2, равносильна выполнению условий в) и г) при $i=1$, что и завершает доказательство теоремы.

Дословно так же устанавливается и критерий полунаследственности треугольного кольца.

Теорема 2а. *В обозначениях теоремы 2 кольцо $A$ полунаследственно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) *все $A_i$ полунаследственны;*

б) *$A_{ij}$ — плоские левые $A_i$-модули;*

в) *для любого конечнопорожденного правого идеала $I\subset A_i$ всякий конечнопорожденный $A_j$-подмодуль в $\overline{A}_{ij}/I\overline{A}_{ij}$ проективен;*

г) *для любого конечнопорожденного правого идеала $I\subset A_i$ все $\mu^{I}_{ikj}$ суть мономорфизмы.*

В следующих параграфах мы увидим, что во многих интересных случаях условие г) в теоремах 2 и 2а достаточно проверять лишь при $I=0$. Приведем пример, который показывает, что в общем случае это уже не так. Пусть $K$ — произвольное поле, $R=K[t]$ — кольцо многочленов над $K$. Рассмотрим кольцо $A$ треугольных матриц вида

$$\begin{bmatrix} R & tR & R \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}.$$

Очевидно, здесь выполнены условия а)—в) теоремы 2 и, кроме того, условие г) для $I=0$: $\mu^{0}_{123}: tR\otimes_K K\to R$ — мономорфизм. Однако для идеала $I=tR$ условие г) не выполнено: $\mu^{tR}_{123}: (tR/t^2R)\otimes_K K\to R/tR$ — вообще нулевой гомоморфизм. Поэтому $A$ даже не полунаследственно.

## § 3. Кольца с условиями конечности

Накладывая на кольцо $A$ ограничения конечности, теорему 2 можно существенно уточнить. Сформулируем ряд следствий, уточняющих эту теорему в разных случаях. Всюду, где говорится о треугольном кольце $A$, мы предполагаем, что в $A$ задано некоторое треугольное первичное разложение единицы, и пользуемся обозначениями теоремы 2.

Следствие 1 (М. Харада [1]). *Треугольное кольцо $A$ совершенно и наследственно* тогда и только тогда, когда все $A_i$ — простые артиновы кольца, а все гомоморфизмы*

$$\mu^0_{ikj}: \bar{A}_{ik} \otimes_{A_k} A_{kj} \to A_{ij} \Big/ \sum_{i<l<k} A_{il}A_{lk}$$

*мономорфны.*

Доказательство вытекает из того, что совершенные первичные кольца — простые артиновы, что автоматически влечет выполнение условий а) — в). Кроме того, всякий правый идеал в $A_i$ является прямым слагаемым, поэтому условие г) достаточно проверять при $I=0$.

Следствие 2. *Нётерово треугольное кольцо $A$ наследственно тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

а) *все $A_i$ — наследственные кольца;*

б) $A_{ij} \simeq \tilde{A}_i \otimes_{A_i} A_{ij}$, где $\tilde{A}_i$ — *правое классическое кольцо частных $A_i$* (оно существует и является простым артиновым кольцом по теореме Голди [8]);

в) $\tilde{A}_{ij}$ — *проективные $A_j$-модули;*

г) *все $\mu^0_{ikj}$ суть мономорфизмы.*

Доказательство. Необходимость нужно проверить лишь для условия б). Но $A_{ij}$ — плоский левый $A_i$-модуль, поэтому, если $a \in A_i$ — неделитель нуля, умножение слева на $a$ — это мономорфизм $A_{ij}$ в себя и $A_{ij} \simeq aA_{ij}$ как $A_j$-модуль. Применяя условие в) теоремы 2 к правому идеалу $aA_i$, получим $A_{ij} \simeq aA_{ij} \oplus (A_{ij}/aA_{ij})$, откуда, ввиду нётеровости, $aA_{ij} = A_{ij}$, т. е. умножение на $a$ — автоморфизм $A_{ij}$. Но это и означает, что $\tilde{A}_i \otimes_{A_i} A_{ij} \simeq A_{ij}$.

Наоборот, если перечисленные условия выполнены, то, так как $\tilde{A}_i$ — плоский левый $A_i$-модуль (см. [8]), условия а) и б) теоремы 2 также выполняются. Кроме того, $IA_{ij} = (I\tilde{A}_i)A_{ij}$, а $I\tilde{A}_i$ — прямое слагаемое $\tilde{A}_i$, поэтому условия в) и г) теоремы 2 достаточно проверить при $I=0$, а тогда они совпадают с условиями в) и г) данного следствия.

Следствие 3. *Двусторонне наследственное нётерово кольцо изоморфно кольцу треугольных матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & V \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

*где $A$ — артиново, а $B$ — прямое произведение первичных колец.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1, достаточно проверить, что если $A_1$ и $A_2$ — первичные нётеровы кольца, а $M$ — ненулевой $A_1$-$A_2$-бимодуль, нётеровый как $A_2$-модуль, причем кольцо треугольных матриц

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & M \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

двусторонне наследственно, то $A_1$ артиново.

* Заметим, что согласно [12] для совершенных колец наследственность справа и слева равносильны.

По следствию 2, $M$ можно рассматривать как левый модуль над простым артиновым кольцом $\tilde{A}_1$ (правым классическим кольцом частных $A_1$). Если $T$ наследственно слева, то $M$, а потому и $\tilde{A}_1$ суть проективные левые $A_1$-модули. Тогда найдутся гомоморфизмы левых $A_1$-модулей $f_\alpha$: $\tilde{A}_1 \to A_1$ и элементы $x_\alpha \in \tilde{A}_1$ такие, что для любого $x \in \tilde{A}_1$ лишь конечное число $f_\alpha(x)$ отлично от нуля и $x = \sum_\alpha f_\alpha(x) x_\alpha$ (см. [11], предложение VII.3.1). Легко видеть, что $f_\alpha$, рассмотренное как отображение $\tilde{A}_1 \to \tilde{A}_1$, есть гомоморфизм левых $\tilde{A}_1$-модулей, поэтому он порождается умножением справа на элемент $y_\alpha = f_\alpha(1)$. При этом $\tilde{A}_1 y_\alpha \subset A_1$ и лишь конечное число $y_\alpha$ отлично от нуля. Тогда $\{x_\alpha / y_\alpha \neq 0\}$—конечная система образующих левого $A_1$-модуля $\tilde{A}_1$. Ввиду условия Оре (см. [8]), найдется такой неделитель нуля $a \in A_1$, что $x_\alpha a \in A_1$ для всех $\alpha$ таких, что $y_\alpha \neq 0$, откуда получаем $\tilde{A}_1 a \subset A_1$, в частности, $a^{-1} = a^{-2} a \in A_1$, и $A_1 = \tilde{A}_1$ — простое артиново кольцо.

Если кольцо $A$ двусторонне нётерово, то же рассуждение приводит к известной теореме Чэттерса [3].

Следствие 4. *Двусторонне нётерово наследственное* кольцо разлагается в прямую сумму артинова кольца и нескольких первичных колец.*

## § 4. Виды и тензорные алгебры

Укажем теперь одну конструкцию, которая позволяет описать довольно широкий класс наследственных колец. Видом назовем конечный набор $S = (A_i, V_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где $A_i$ — первичные кольца, а $V_{ij}$ есть $A_i$-$A_j$-бимодуль. Положим $B = \prod_i A_i$, $V = \bigoplus_{i,j} V_{ij}$. Тогда $V$ является бимодулем над кольцом $B$ и можно рассмотреть его тензорную алгебру $T_B(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_i$, где $T_0 = B$, а $T_{i+1} = T_i \otimes_B V$. Назовем $T_B(V)$ тензорной алгеброй вида $S$ и обозначим ее через $T(S)$. Схемой $\Gamma(S)$ вида $S$ назовем граф, вершины которого занумерованы числами $i = 1, \ldots, n$, а из точки $i$ в точку $j$ ведет стрелка тогда и только тогда, когда $V_{ij} \neq 0$. Вид назовем ациклическим, если в его схеме нет (ориентированных) циклов, т. е. индексы можно выбрать так, что $V_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$. В этом случае, очевидно, $T(S)$ является треугольным кольцом, а $T_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$ — его первичным радикалом.

Со всяким треугольным кольцом $A$ можно связать ациклический вид $S = S(A)$, полагая $A_i = e_i A e_i$, а $V_{ij} = A_{ij} / \sum_{i<k<j} A_{ik} A_{kj}$, где $A_{ij} = e_i A e_j$ для некоторого треугольного первичного разложения единицы $1 = e_1 + \ldots + e_n$. По следствию из предложения 2, этот вид не зависит от выбора такого

* Напомним, что для двусторонне нётеровых колец наследственности справа и слева совпадают (см. [13]).

разложения. Назовем его **видом треугольного кольца** $A$, а его схему — **схемой треугольного кольца** $A$.

Пусть теперь $N$ — первичный радикал треугольного кольца $A$, $\bar{A}$ — такое подкольцо в $A$, что $A=\bar{A}\oplus N$ (оно существует по предложению 1). Кольцо $A$ назовем **расщепляемым**, если в $N$ есть такой $\bar{A}$-подбимодуль $\bar{N}$, что $N=\bar{N}\oplus N^2$. Ввиду предложения 1, расщепляемость не зависит от выбора подкольца $\bar{A}$, так как любые два подкольца с этим свойством унипотентно сопряжены. Легко видеть, что $A$ расщепляемо тогда и только тогда, когда в $A_{ij}$ есть такой $A_i$-$A_j$-подбимодуль $\bar{A}_{ij}$, что $A_{ij}=$ $=\bar{A}_{ij}\oplus \sum\limits_{i<k<j} A_{ik}A_{kj}$. В этом случае $\bar{N}=\sum\limits_{i,j} \bar{A}_{ij}$. Примером расщепляемых треугольных колец служат тензорные алгебры ациклических видов. Следующий результат показывает, что этот пример в некотором роде универсален.

**Предложение 2.** *Всякое расщепляемое треугольное кольцо $A$ изоморфно фактор-кольцу $T(S)/J$, где $S=S(A)$ — вид кольца $A$, а $J$ — идеал, содержащийся в $T_+^2$.*

**Доказательство.** Выберем $\bar{A}\subset A$ так, что $A=\bar{A}\oplus N$, и $\bar{A}$-подбимодуль $\bar{N}\subset N$ так, что $N=\bar{N}\oplus N^2$. Тогда, если $S(A)=(A_i, V_{ij})$, то, полагая $B=\prod\limits_i A_i$, $V=\oplus_{i,j} V_{ij}$, мы видим, что $B\simeq\bar{A}$ и $V\simeq\bar{N}$ как $B$-бимодуль. Эти изоморфизмы однозначно продолжаются до гомоморфизма колец $\varphi$: $T(S)=T_B(V)\to A$. Поскольку $N$ нильпотентен, а $\bar{N}$ порождает $N$, $\varphi$ — эпиморфизм, а поскольку ограничения $\varphi$ на $T_0=B$ и $T_1=V$ — мономорфизмы, $\mathrm{Ker}\,\varphi=J\subset T_+^2$, что и требовалось доказать.

Отметим один полезный случай, в котором расщепляемость треугольного кольца можно определить по его схеме. **Обходом** некоторой стрелки графа назовем (ориентированный) путь длины, большей 1, с тем же началом и концом.

**Предложение 3.** *Если в схеме* $\Gamma(A)=\Gamma(S(A))$ *нет обходов, то треугольное кольцо $A$ расщепляемо.*

**Доказательство.** Очевидно, если в схеме $\Gamma(A)$ нет путей с началом $i$ и концом $j$, то $A_{ij}=0$, а если $i$ и $j$ не соединены стрелкой, то $A_{ij}\subset$ $\subset N^2$. Пусть в схеме $\Gamma(A)$ есть стрелка с началом $i$ и концом $j$. Поскольку у нее нет обходов, для любой точки $k$ либо $A_{ik}=0$, либо $A_{kj}=0$, откуда $A_{ij}\cap N^2=0$, и в качестве $\bar{N}$ можно взять $\sum A_{ij}$, где сумма берется по всем стрелкам графа $\Gamma(A)$.

Назовем вид **наследственным** (**полунаследственным**), если таковой является его тензорная алгебра. Из теоремы 2 легко выводится критерий наследственности ациклического вида *.

---

* Из результатов Ю. В. Роганова [14] следует, что этот критерий имеет место и без предположения ацикличности. По-видимому, то же верно и для критерия полунаследственности (предложение 4а).

Предложение 4. *Ациклический вид $S=(A_i, V_{ij})$ наследствен тогда и только тогда, когда все $A_i$ — наследственные кольца, $V_{ij}$ — плоские левые $A_i$-модули и для любого правого идеала $I\subset A_i$ фактор-модули $V_{ij}/IV_{ij}$ проективны как $A_j$-модули.*

Доказательство. Пусть $V_{ij}=0$ при $i\geqslant j$. Обозначим через $e_i$ единицу кольца $A_i$. Тогда $1=e_1+\ldots+e_n$ — треугольное разложение единицы кольца $A=T(S)$, причем

$$A_{ij}=e_iAe_j=\bigoplus_{(k_1,\ldots,k_s)} V_{ik_1}\otimes_{A_{k_1}}\ldots\otimes_{A_{k_s}} V_{k_sj},$$

а $e_iAe_i=A_i$. В частности, $\bar{A}_{ij}=V_{ij}$, так что условия данного предложения равносильны условиям а) — в) теоремы 2 применительно к кольцу $T(S)$. Кроме того, гомоморфизмы

$$\mu^0_{ikj}: V_{ik}\otimes_{A_k} A_{kj}\to A_{ij}\Big/\sum_{i<l<k} A_{il}A_{lj}$$

суть расщепляемые мономорфизмы бимодулей, а тогда и гоморфизмы $\mu^I_{ikj}$ также являются мономорфизмами, поскольку $\mu^I_{ikj}=\varepsilon\otimes\mu^0_{ikj}$, где $\varepsilon$ — тождественный гомоморфизм $A_i$-модуля $A_i/I$. Следовательно, условие г) теоремы 2 выполнено всегда, и предложение полностью доказано.

Аналогично из теоремы 2а выводится критерий полунаследственности.

Предложение 4а. *Ациклический вид $S=(A_i, V_{ij})$ полунаследствен тогда и только тогда, когда все $A_i$ — полунаследственные кольца, $V_{ij}$ — плоские левые $A_i$-модули и для любого конечнопорожденного правого идеала $I\subset A_i$ всякий конечнопорожденный $A_j$-подмодуль в $V_{ij}/IV_{ij}$ проективен.*

Поскольку полунаследственные кольца всегда треугольны, можно говорить о виде и о расщепляемости такого кольца. Из предложений 4 и 4а непосредственно вытекает такое

Следствие. *Вид наследственного (полунаследственного) кольца всегда наследствен (полунаследствен).*

Подведем итог нашим рассмотрениям.

Теорема 3. *Расщепляемые наследственные (полунаследственные) кольца — это в точности тензорные алгебры наследственных (полунаследственных) ациклических видов.*

Доказательство. Очевидно, единственное, что нужно проверить — это то, что если расщепляемое треугольное кольцо $A$ полунаследственно, то эпиморфизм $\varphi: T(S)\to A$, где $S=S(A)$, построенный при доказательстве предложения 2, является мономорфизмом. Но это обеспечивается тем, что все $\mu^0_{ikj}$ суть мономорфизмы (условие г) теорем 2 и 2а при $I=0$).

Заметим, что из доказательства мы получаем также такое следствие.

Следствие 1. *Расщепляемое треугольное кольцо наследственно (полунаследственно) тогда и только тогда, когда выполнены условия а)—в) теоремы 2 (2а) и все гомоморфизмы $\mu^0_{ikj}$ суть мономорфизмы.*

С л е д с т в и е 2. *Расщепляемые полунаследственные кольца $A$ и $B$ с первичными радикалами соответственно $N$ и $M$ изоморфны тогда и только тогда, когда $A/N^2 \simeq B/M^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из того, что $S(A) = S(A/N^2)$.

Из предложения 3 получаем еще такой результат.

С л е д с т в и е 3. *Если в схеме полунаследственного кольца нет обходов, то оно изоморфно тензорной алгебре своего вида.*

Для конечномерных алгебр над полем $K$ понятие вида совпадает с понятием $K$-вида, введенным Габриелем [5]. Если поле $K$ совершенно, то, поскольку всякая полупростая $K$-алгебра сепарабельна, всякая треугольная алгебра расщепляема, и теорема 3 превращается в хорошо известный результат.

С л е д с т в и е 4. *Конечномерные наследственные алгебры над совершенным полем $K$ — это в точности тензорные алгебры ациклических $K$-видов.*

Отметим, наконец, ещё одно полезное следствие.

С л е д с т в и е 5. *Пусть $A$ — наследственное (полунаследственное) кольцо, $N$ — его первичный радикал, $B$ — градуированное кольцо, ассоциированное с $N$-адической фильтрацией кольца $A$. Тогда $B$ также наследственно (полунаследственно). Если $A$ расщепляемо, то $A \simeq B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что $B$ всегда расщепляемо, $S(A) = S(B)$ и гомоморфизмы $\mu^0_{ikj}$ для $A$ и $B$ мономорфны одновременно.

Приведенный в конце § 2 пример показывает, что это следствие нельзя обратить: для указанного там кольца $A$ ассоциированное градуированное кольцо $B$ наследственно.

Приведем в заключение простой пример, показывающий, что в следствии 4 нельзя отказаться от условия совершенности, а в следствии 2 нельзя отказаться от условия расщепляемости, даже заменяя квадрат радикала на любую фиксированную степень.

Пусть $L$ — несепарабельное расширение поля $K$, $D$ — ненулевое дифференцирование $L$ над $K$, $U$ — двумерное левое векторное пространство над $L$ с базисом $\{u_1, u_2\}$. Превратим $U$ в $L$-бимодуль, полагая $u_1\alpha = \alpha u_1 + (D\alpha)u_2$, $u_2\alpha = \alpha u_2$ для всех $\alpha \in L$. Рассмотрим треугольную $K$-алгебру $A$, для которой $A_i = L$, $A_{ij} = L$ при $(i, j) \neq (1, n)$, а $A_{1n} = U$, причем умножение $A_{ik}A_{kj}$ при $(i, j) \neq (1, n)$ определяется умножением в поле $L$, а для $\alpha \in A_{1k}$, $\beta \in A_{kn}$ произведением является $\alpha\beta u_2$. Легко видеть, что $A$ — нерасщепляемая наследственная $K$-алгебра, причем, если $N$ — радикал $A$, $B$ — ассоциированная с $N$-адической фильтрацией градуированная алгебра и $M$ — радикал $B$, то $A/N^{n-1} \simeq B/M^{n-1}$.

Поступила в редакцию
29/III 1979 г.

## Литература


1. **M. Harada**, Hereditary semi-primary rings and triangular matrix rings, Nagoya Math. J., **27** (1966), 463—484.
2. **L. W. Small**, Hereditary rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **55** (1966), 25—27.
3. **A. W. Chatters**, A decomposition theory for Noetherian hereditary rings, Bull. London Math. Soc., **4** (1972), 125—126.
4. **J. Palmer, J.-E. Roos**, Formules explicites pour la dimension homologique des anneaux de matrices généralisées, C. r. Acad. Sci. Paris, **273** (1971), 1026—1029.
5. **P. Gabriel**, Indecomposable representations. II, Symposia Math., **11** (1973), 81—104.
6. **Н. М. Губарени**, О полусовершенных наследственных справа кольцах модульно-ограниченного типа, Препринт ИМ-78.1, Киев, 1978.
7. **Ю. А. Дрозд**, Строение наследственных колец, II Всес. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Кишинев, 1974, 21—22.
8. **И. Ламбек**, Кольца и модули, Москва, изд-во «Мир», 1971.
9. **Л. А. Койфман**, Кольца, над которыми сингулярные модули инъективны. II, Матем. исследования, **6**, № 3 (1971), 62—84.
10. **P. L. Sandomierski**, A note on the global dimension of subrings, Proc. Amer. Math. Soc., **23** (1969), 478—480.
11. **А. Картан, С. Эйленберг**, Гомологическая алгебра, Москва, ИЛ, 1960.
12. **H. Bass**, Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 367—409.
13. **D. G. Northcott**, An introduction to homological algebra, Cambridge, Univ. Press, 1960.
14. **Ю. В. Роганов**, Размерность тензорной алгебры проективного бимодуля, Матем. заметки, **18**, вып. **6** (1975), 895—902.


---


Технический редактор *Т. И. Васильева*

Сдано в набор 17.06.80 Подписано к печати 29.08.80 Формат бумаги 70×108$^{1}/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Уч.-изд. л. 13,4 Бум. л. 5,5 Тираж 1797 экз. Зак. 5041

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10