1. Вправи 1

Виконати до 4 березня 2010

Вправа 1.1. Доведіть, що кожен ідеал має цілком зведену базу Гребнера.

Вправа 1.2. Доведіть, що зведена база Ґребнера ідеалу I є *мінімальною* множиною твірних у тому розумінні, що з неї не можна вилучити жоден поліном (після цього вона перестане бути множиною твірних I).

Вправа 1.3. Доведіть, що зведений залишок $(f|S)$ завжди існує, а якщо S є базою Ґребнера, він єдиний.

Надалі ми вважаємо, що $\leqslant$ — *степенево-лексикографічний порядок*, тобто $x^\alpha < x^\beta$ означає, що або $\deg x^\alpha < \deg x^\beta$, або $\deg x^\alpha = \deg x^\beta$ і знайдеться такий номер k ($1 \leqslant k \leqslant n$), що $\alpha_i = \beta_i$ при $1 \leqslant i < k$, а $\alpha_k < \beta_k$.

Вправа 1.4. Знайдіть зведені бази Ґребнера для ідеалів:

(1) $\langle\, x^2 - y, x^3 - z\,\rangle$,
(2) $\langle\, xy^2 - xz + y, xy - z^2, x - yz^4\,\rangle$.

Вправа 1.5. Доведіть, що $\sqrt{I}$, де I — ідеал, також є ідеалом.

Вправа 1.6. Доведіть, що кожна скінченна підмножина в $\mathbb{F}^n$ є афінним многовидом.

Вправа 1.7. Намалюйте на дійсній афінній площині $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ афінні многовиди, задані рівняннями:

(1) $x^2 - y^2 = 0$,
(2) $x^3 - y^2 = 0$ («кубіка з вістрям»),
(3) $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ («кубіка з вузлом»),
(4) $x^3 - x - y^2 = 0$ («гладка кубіка»).

Вправа 1.8. Доведіть, що якщо $X_i \subseteq \mathbb{F}^n$ — афінні многовиди, то й $\bigcup_i X_i$ — афінний многовид, а якщо множина індексів скінченна, то й $\bigcap_i X_i$ — афінний многовид.

Вправа 1.9. Доведіть, що афінний простір у топології Зариського є *незвідним*, тобто, довільні дві непорожні відкриті множини в ньому перетинаються.

Вправа 1.10. Нехай $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ — нескінченне підполе. Доведіть, що множина $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ є щільною в $\mathbb{A}^n(\mathbb{F})$ (у топології Зариського).

2. Вправи 2

Виконати до 18 березня 2010

Вправа 2.1. Доведіть, що завузлена кубіка $y^2 = x^3 + x^2$ та кубіка з вістрям $y^2 = x^3$ — раціональні криві.

Вправа 2.2. Доведіть, що незвідна квадратична крива на проективній площині ізоморфна проективній прямій.

Вправа 2.3. Доведіть, що довільний автоморфізм проективної прямої має вигляд $(x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$, $(ad - bc \neq 0)$ і має щонайбільше 2 нерухомих точки.

Вправа 2.4. Користуючись попередньою вправою, доведіть, що плоска кубіка $C \subset \mathbb{P}^2$, задана рівнянням $zy^2 = x(x - z)(x - \lambda z)$, де $\lambda \notin \{0, 1\}$, не ізоморфіна проективній прямій.

Вправа 2.5. Знайдіть компоненти многовиду $\mathcal{V}(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^3$. Доведіть, що вони раціональні.

Вправа 2.6. В яких точках кривої $x^2 + y^2 = 1$ визначена раціональна функція $(y - 1)/x$?

Вправа 2.7. В яких точках проективної площини визначене раціональне відображення $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$? Чи є воно біраціональним? Якщо так, в яких точках визначене обернене раціональне відображення?

Вправа 2.8. Доведіть, що якщо $X \subset \mathbb{P}^n$ — нескіченний проективний многовид, а $H \subset \mathbb{P}^n$ — гіперповерхня (тобто, задана одним рівнянням), то $X \cap H \neq 0$.

(Скористайтеся, що на проективних многовидах немає регулярних функцій, крім констант).

Вправа 2.9. Доведіть, що образ відображення Веронезе $v_{k,n}$ збігається з проективним многовидом $V_{k,n} \subset \mathbb{P}^N$, який задається рівняннями

$$w_{k_0k_1\dots k_n} w_{l_0l_1\dots l_n} = w_{k'_0k'_1\dots k'_n} w_{l'_0l'_1\dots l'_n}$$

для всіх таких наборів $k_0, k_1, \dots, k_n,\ l_0, l_1, \dots, l_n,\ k'_0, k'_1, \dots, k'_n,\ l'_0, l'_1, \dots, l'_n$, що $k_i + l_i = k'_i + l'_i$ при всіх $0 \leqslant i \leqslant n$. Тут $N = \binom{k+n}{n} - 1$, а координати в $\mathbb{P}^N$ позначені $w_{k_0k_1\dots k_n}$, де $\sum_{i=0}^{n} k_i = k$.

Вправа 2.10. Скористайтеся відображенням Веронезе для встановлення такого результату:

Нехай $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — лінійно незалежні однорідні многочлени однакового степеня, а $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективний многовид, на якому ці многочлени не мають спільних нулів. Розглянемо відображення $f : X \to \mathbb{P}^m$ таке, що $f(x) = (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_m(x))$ та образ $Y = f(X)$. Тоді одержане відображення $X \to Y$ є скінченним.

3. Вправи 3

Виконати до 1 квітня 2010

Вправа 3.1. Доведіть, що $\dim X$ збігається з максивальною довжиною l спадних ланцюгів незвідних підмноговидів $X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_l$.

Вправа 3.2. Доведіть, що розмірність проективного многовиду $X \subseteq \mathbb{P}^n$ збігається з найменшим значенням m таким, що існують m гіперплощин $L_1, L_2, \ldots, L_m$ таких, що перетин $X \cap (\bigcap_{i=1}^m L_i)$ є скінченним.

Вправа 3.3. Доведіть, що $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \not\simeq \mathbb{P}^{n+m}$ для довільних $m, n > 0$.

Вправа 3.4. Нехай алгебрична група G діє на незвідному многовиді X, причому має лише скінченну кількість орбіт. Доведіть, що тоді існує єдина відкрита орбіта, а $\dim X = \dim G - \min \{ \dim \operatorname{St} x \mid x \in X \}$.

Вправа 3.5. Фіксіуємо деякі числа $m_0, m_1, \ldots, m_n$ і позначимо $N_i = \binom{m_i+n}{n} - 1$. Ототожнимо множину однорідних многочленів степеня m_i від змінних $x_0, x_1, \ldots, x_n$, розглянутих з точністю до пропорційності, з проективним простором $\mathbb{P}^{N_i}$. У добутку $\mathbb{P}^n \times \prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{N_i}$ розглянемо підмноговид $Z = \{ (x, F_0, F_1, \ldots, F_n) \mid F_i(x) = 0 \text{ для всіх } i \}$. Нехай $\pi : Z \to \mathbb{P}^n$ та $\phi : Z \to \prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{N_i}$ — її відповідні проекції. Розглянувши π, встановіть, що $\dim Z = \sum_{i=0}^n N_i - 1$. Встановіть також, що $\dim \phi(Z) = \dim Z$. Виведіть звідси, що існує такий многочлен $R(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ від коефіцієнтів однорідних многочленів $F_0, F_1, \ldots, F_n$ заданих степенів, що система рівнянь $F_0(x) = F_1(x) = \cdots = F_n(x) = 0$ має ненульовий розв'язок тоді й лише тоді, коли $R(F_0, F_1, \ldots, F_n) = 0$.

Вправа 3.6. Доведіть, що ненульова кососиметрична матриця (c_{ij}) $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$, $n > 2$, яка задовольняє плюкерові співвідношення $c_{ir}c_{jk} - c_{jr}c_{ik} - c_{kr}c_{ij} = 0$ при всіх $r < i < j < k$, є матрицею плюкерових координат p_{ij} деякої прямої $L \subset \mathbb{P}^n$.

Порада: припускаючи, що $c_{01} \neq 0$, знайдіть такі точки $a, b \in \mathbb{P}^n$, що для прямої, яка проходить через ці точки, $p_{0i} = c_{0i}$ та $p_{1i} = c_{1i}$ для всіх i. Після цього скористайтеся плюкеровими співвідношеннями.

Вправа 3.7. Нехай $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — однорідний многочлен степеня 4. Доведіть, що існує многочлен $G = G(F)$ від коефіцієнтів форми F такий, що на поверхні $F = 0$ лежить принаймні одна пряма тоді й лише тоді, коли $G(F) = 0$.

Вправа 3.8. Нехай $X \subset \mathbb{A}^3$ — крива, яка не є об'єднанням прямих, паралельних осі Oz (x, y, z — координати в $\mathbb{A}^3$). Розглянемо в $\mathbb{F}[x, y]$ ідеал $I = \{ f(x, y) \mid f|_X = 0 \}$. Доведіть, що I — головний ідеал. Яку криву на $\mathbb{A}^2$ він задає?

4. Вправи 4

Виконати до 15 квітня 2010

Вправа 4.1. Доведіть, що плюкерів многовид Π_n (многовид прямих у $\mathbb{P}^n$) є неособливим і незвідним розмірності $2(n-1)$.

Вправа 4.2. Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — замкнений підмноговид, $\mathcal{I}(X) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$. Позначимо через J_X матрицю розміру $m \times (n+1)$ з компонентами $\partial F_i/\partial x_j$ і через $J_X(x)$ значення цієї матриці в точці $x \in X$. Доведіть, що точка x є неособливою тоді й лише тоді, коли $\operatorname{rk} J_X(x) = n - \dim X_x$. Виведіть звідси, що точка x є неособливою тоді й лише тоді, коли її (довільний) прообраз у $\mathbb{A}^{n+1}$ є неособливим, як точка конуса $\widetilde{X} = V(F_1, F_2, \dots, F_m) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$.

Порада: Розгляньте афінний окіл $U = X \cap \mathbb{A}^n_i$, який містить точку x. Скористайтеся Якобієвим критерієм для афінних многовидів та «формулою Ойлера»: $mF = \sum_{i=0}^n x_i(\partial F/\partial x_i)$ для довільного однорідного многочлена степеня m.

Вправа 4.3. Припустимо, що $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Розглядаючи гіперповерхні степеня m у просторі $\mathbb{P}^n$ як точки проективного простору $\mathbb{P}^N$, де $N = \binom{n+m}{m} - 1$, довести, що особливі поверхні утворюють гіперповерхню в $\mathbb{P}^N$.

Порада: Скористайтеся вправою 3.5.

Вправа 4.4. Нехай $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Доведіть, що x є локальним параметром у точці $(0,1)$. Знайдіть розклад у степеневий ряд в околі цієї точки функцій y та $x/(1-y)$.

Вправа 4.5. Нехай $X = V(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{A}^3$, $O = (0,0,0)$, $L = V(x, y - z)$. Доведіть, що пряма L не може бути задана на X одним рівнянням ні в якому околі точки O.

Вправа 4.6. Довести, що, якщо гіперповерхня степеня 2 має особливу точку, вона є конусом з вершиною в цій точці.

Вправа 4.7. Довести, що незвідна кубічна крива X на площині має щонайбільше одну особливу точку.

Порада: Доведіть, що якщо X має дві особливі точки a, b, то $X \supseteq L$, де L — пряма, яка проходить через точки a і b.

Вправа 4.8. При яких значеннях параметру c поверхня $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - cx_0x_1x_2x_3 = 0$ у просторі $\mathbb{P}^3$ має особливі точки? Знайдіть ці точки.

Вправа 4.9. Доведіть, що, якщо кожна функція має єдиний розклад Тейлора в точці x, то ця точка неособлива.

5. Вправи 5

Виконати до 29 квітня

Вправа 5.1. Обчисліть дивізори функцій x і y на кубчній кривій, заданій у афінній частині рівнянням $y^2 = x^3 - x$.

Вправа 5.2. Доведіть, що якщо $l(p) > 1$, де p — точка неособливої проективної кривої X, то $X \simeq \mathbb{P}^1$.

Вправа 5.3. Припустимо, що $X \not\simeq \mathbb{P}^1$, а $l(p+q) = 2$ для деяких точок p і q (можливо, $p = q$). Доведіть, що поле $\mathbb{F}(X)$ є квадратичним розширенням поля $\mathbb{F}(x)$, тобто, якщо $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, $\mathbb{F}(X) = \mathbb{F}(x, y)$, де $y^2 = f(x)$ для деякого многочлена $f(x)$. (Такі криві звуться *гіпереліптичними*).

Вправа 5.4. Нехай X — неособлива крива в $\mathbb{P}^n$, F — однорідний многочлен степеня m, який не обертається тотожно в нуль на X. Визначимо $v_p(F) = v_p(F/G)$, де G — однорідний многочлен степеня m такий, що $G(p) \neq 0$, і $(F)_X = \sum_p v_p(F)$ (*дивізор форми F на кривій X*). Якщо многочлен F незвідний, число $\deg(F)_X$ зветься *кратністю перетину* кривої X з гіперповерхнею $H = PV(F)$ і позначається $(X.H)$.

(1) Чому це означення коректне (не залежить від вибору G)?
(2) Доведіть, що $(F)_X = (F_1)_X$, якщо $\deg F = \deg F_1$. Зокрема, $\deg(F)_X$ залежить лише від $\deg F$ і $\deg(F)_X = m \deg(L)_X$, де L — лінійна форма. Число $\deg X = \deg(L)_X$ зветься *степенем* кривої X у просторі $\mathbb{P}^n$ (вона може залежати від занурення $X \to \mathbb{P}^n$).
(3) Доведіть, що якщо гіперплощина $L = 0$ не містить дотичну до X в точці p, то $v_p(L) = 0$.
(4) Доведіть, що існує така гіперплощина, яка не містить жодну дотичну до X.
(5) Виведіть звідси, що $\deg X$ дорівнює найбільшій кількості точок, в яких гіперплощина може перетинати X.

Отже, ми вивели *теорему Безу*: $(X.H) = \deg X \deg H$.

Вправа 5.5. Знайдіть на кубічній кривій $y^2 = x(x-1)(x-a)$ ($a \in \mathbb{F} \setminus \{0,1\}$ раціональну функцію g, для якої $(g) = (dx)$. Виведіть звідси, що $\Omega[X] = \langle\, dx/g \,\rangle$.

Вправа 5.6. Нехай $X \subset \mathbb{P}^2$ — неособлива крива, задана в афінній частині $\mathbb{A}^2_0$ рівнянням $F(x,y) = 0$ степеня n. (Тут $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$). Позначимо $\omega = dx/F'_y$, $U = X \cap \mathbb{A}^2_0$ і $U_1 = D(F'_y) \subset U$. Будемо вважати, що F містить y^n з ненульовим коефіцієнтом.

(1) Доведіть, що $\Omega[U_1] = \mathbb{F}[U_1]\omega$.
(2) Доведіть, що $\omega \in \Omega[U]$ і $\operatorname{supp}(\omega) \cap U = \emptyset$.
(3) Перевірте, що на афінній частині $U' = X \cap \mathbb{A}^2_1$ має місце рівність $\omega = -\omega' u^{n-3}$, де $u = x_0/x_1$, $v = x_2/x_1$, $\omega' = du/G'_v$, а $G(u,v)$ — рівняння X на $\mathbb{A}^2_1$.
(4) Виведіть звідси, що $\deg(\omega) = n(n-3)$.
(5) Обчисліть рід кривої X.
(6) Виведіть звідси, що не існує плоских неособливих кривих роду 4 або 5.

6. Вправи 6

Виконати до 24 травня

У цьому розділі X та X' позначає неособливу кубічну плоску криву, o та o', відповідно, фіксовані точки X та X', які обрано нейтральними елемнтами груп точок. Якщо X задано рівнянням $y^2 = f(x)$, $\deg f = 3$, вважаємо, що o — нескінченно віддалена точка (з однорідними координатами $(0 : 0 : 1)$).

Вправа 6.1. Довести, що через кожну точку X проходить рівно 4 дотичні до цієї кривої.

Вправа 6.2. *Точкою перегину* плоскої кривої, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$ зветься така точка p, що дотична в ній має степнінь дотику принаймні 3. Доведіть, що X має рівно 9 точок перегину, причому вони утворюють підгрупу в групі точок кривої X, яка є добутком двох груп порядку 3.

Вправа 6.3. Нехай $\operatorname{char} \mathbb{F} = p > 0$. Доведіть, що кожне регулярне відображення $X \to X'$ можна подати у вигляді $\phi^k \psi$, де ϕ — відображення Фробеніуса: $\phi(a, b) = (a^p, b^p)$, а ψ — сепарабельне відображення.

Вправа 6.4. Нехай X задана рівнянням $y^2 = x^3 + x$, а $p \equiv 3 \pmod 4$. Доведіть, що $X(\mathbb{F}_p) = A \times C$, де $\#(A)$ не ділиться на 3, а C — циклічна група порядку 3^r. Чому дорівнює r ?

Вправа 6.5. Доведіть, що якщо відображення $q : A \to \mathbb{Q}$, де A — абелева група, задовольняє тотожність $q(a+b)+q(a-b) = 2(q(a)+q(b))$, то існує білінійна функція $\beta : A \times A \to \mathbb{Q}$ така, що $q(a) = \beta(a, a)$.

Вправа 6.6. Доведіть, що кількість точок на кривій $y^2 = x^3 + x$ зі значеннями у полі $\mathbb{F}_q$, де q непарне, ділиться на 4.

Вправа 6.7. Доведіть, що, якщо $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, рівняння кривої X можна звести до одного з виглядів:

$$y^2 + xy = x^3 + Ax^2 + B, \tag{1}$$

$$y^2 + Cy = x^3 + Ax + B, . \tag{2}$$

Знайдіть формули, які визначають координати суми точок на X через координати доданків у кожному з цих випадків.

Контрольна робота № 1

В усіх вправах, де це потрібно, можна вважати, що характеристика поля дорівнює 0.

Задача 1. Нехай I, J — ідеали в $A = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Доведіть, що $I \cap J = (yIB + (1-y)JB) \cap A$, де $B = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n, y]$. Виведіть звідси спосіб побудови бази Грьобнера ідеалу $I \cap J$, якщо задано твірні ідеалів I та J.

Задача 2. Побудуйте скінченне біраціональне відображення $\mathbb{A}^1 \to X$, де крива $X \subset \mathbb{A}^2$ задана рівнянням $y^2 = x^3 + x^2$.

Задача 3. Нехай $X \subset \mathbb{P}^n$ — незвідний проективний підмноговид розмірності m, $p \notin X$ і Y — об'єднання всіх прямих, які проходять через p і перетинають X. Доведіть, що Y — незвідний проективний підмноговид у $\mathbb{P}^n$ розмірності $m+1$.

Задача 4. При яких значеннях параметра c крива $X \subset \mathbb{P}^2$, задана в афінній частині рівнянням $x^3 + y^3 - cxy = 1$, є особливою? Знайдіть її особливі точки.

Задача 5. Перевірте, що кубічна крива $X \subset \mathbb{P}^2$, задана в афінній частині рівнянням $y^2 = x^3 - x$, неособлива. Виведіть звідси, що вона не раціональна.

Задача 6. Для кривої, заданої рівнянням $x^3 + y^3 = 1$ і точки $(1, 0)$ перевірте, що y є локальним параметром і знайдіть перші три ненульові члени (не рахуючи вільного члена) розкладу Тейлора функції x у цій точці.

Задача 7. Нехай $X \subset \mathbb{P}^3$ — незвідна неособлива проективна крива. Доведіть, що існує точка $p \notin X$ така, що кожна пряма, яка проходить через p, не є дотичною до X і перетинає X щонайбільше в 2 точках.

Для одержання повного балу достатньо вірно розв'язати 5 задач.