Зміст

1. Комплекси й когомології

complex **Означення 1.1.** (1) Нехай $\mathscr{A}$ — адитивна категорія. *Комплексом* $(A^\bullet, d^\bullet)$ в категорії $\mathscr{A}$ зветься послідовність морфізмів цієї категорії $d^i : A^i \to A^{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ таких, що $d^i d^{i-1} = 0$ для всіх i. Об'єкт A^i зветься *i-ю компонентою* комплексу, а набір морфізмів $d^\bullet = (d^i)$ — *диференціалом* комплексу. Досить часто у позначення комплексу опускають згадку про диференціал і кажуть *комплекс* $A^\bullet$. Тоді, якщо треба, диференціал позначається $d_A^\bullet$.

(2) *Морфізмом* α комплекса $A^\bullet$ в комплекс $B^\bullet$ зветься набір морфізмів $\alpha^i : A^i \to B^i$ такий, що $d_B^i \alpha_i = \alpha_{i+1} d_A^i$ для всіх i. Коротко це записують, як $d_B \alpha = \alpha d_A$ або навіть $d\alpha = \alpha d$.

(3) *Добуток морфізмів* $\alpha : A^\bullet \to B^\bullet$ й $\gamma : B^\bullet \to C^\bullet$ зветься морфізм $\gamma\alpha : A^\bullet \to C^\bullet$ такий, що $(\gamma\alpha)^i = \gamma^i \alpha^i$ для всіх i.

(4) *n-им зсувом* комплексу $A^\bullet$ зветься комплекс $A^\bullet[n]$, i-та компонента якого — це A^{i+n}, а диференціал — це набір морфізмів $(-1)^n d_A^{i+n}$. Комплекс $A^\bullet[1]$ зветься просто *зсувом* комплексу $A^\bullet$.

(5) *n-им зсувом* морфізму $\alpha : A^\bullet \to B^\bullet$ зветься морфізм $\alpha[n] : A^\bullet[n] \to B^\bullet[n]$, в якому i-та компонента дорівнює α^{i+n}.

Очевидно, ці означення визначають *категорію комплексів у категорії* $\mathscr{A}$, яку ми позначимо $\mathsf{Com}\,\mathscr{A}$. Ця категорія також є адитивною: пряма сума комплексів $A^\bullet$ й $B^\bullet$ — це такий комплекс, i-та компонента якого — це $A^i \oplus B^i$, а диференціал — набір морфізмів $d_A^i \oplus d_B^i$. При цьому n-ий зсув є автоморфізмом цієї категорії (оберненим до нього є $(-n)$-ий зсув).

Насправді, об'єктом гомологічної алгебри є не сама категорія комплексів, а деякий її фактор: *гомотопічна категорія*.

homotop **Означення 1.2.** (1) Морфізм комплексів $\alpha : A^\bullet \to B^\bullet$ зветься *гомотопічно тривіальним*, або *гомотопним нулю*, якщо існують такі морфізми $s^i : A^{i+1} \to B^i$, що $\alpha^i = s^i d_A^i + d_B^{i-1} s^{i-1}$ для всіх i. У цьому випадку пишуть $\alpha \sim 0$.

(2) Два морфізми $\alpha, \gamma : A^\bullet \to B^\bullet$ звуться *гомотопними*, якщо $\alpha - \gamma \sim 0$. У цьому випадку пишуть $\alpha \sim \gamma$. Легко бачити, що це є відношенням еквівалентності на множині морфізмів.

(3) *Гомотопічною категорією* над категорією $\mathscr{A}$ зветься категорія $\mathscr{K}\mathscr{A}$, об'єкти якої — це комплекси в категорії $\mathscr{A}$, а морфізми — класи гомотопних морфізмів комплексів.

(4) Два комплекси, $A^\bullet$ і $B^\bullet$, звуться *гомотопними*, якщо вони ізоморфні в гомотопічній категорії, тобто існують такі морфізми комплексів $\alpha : A^\bullet \to B^\bullet$ й $\alpha' : B^\bullet \to A^\bullet$, що $\alpha\alpha' \sim 1_B$, а $\alpha'\alpha \sim 1_A$. Зокрема, якщо $A^\bullet \sim 0$, тобто $1_A \sim 0$, комплекс $A^\bullet$ зветься *гомотопічно тривіальним*.

Читачу залишається перевірити, що клас гомотопії суми або добутку морфізмів залежить лише від класів гомотопії доданків або співмножників.

`zmij` **Лема 1.3** (Лема про змію). *Нехай дано комутативну діаграму з точними рядками*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_3} & & \\
0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & B_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & B_3 & &
\end{array}$$

Тоді існує морфізм $\delta : \operatorname{Ker}\xi_3 \to \operatorname{Coker}\xi_1$ *такий, що послідовність*

$$\operatorname{Ker}\xi_1 \xrightarrow{\bar\alpha_1} \operatorname{Ker}\xi_2 \xrightarrow{\bar\alpha_2} \operatorname{Ker}\xi_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\xi_1 \xrightarrow{\bar\beta_1} \operatorname{Coker}\xi_2 \xrightarrow{\bar\beta_2} \operatorname{Coker}\xi_3,$$

де $\bar\alpha_i$ *— обмеження* α_i *на* $\operatorname{Ker}\xi_i$, *а* $\bar\beta_i(b + \operatorname{Im}\xi_i) = \gamma_i(b) + \operatorname{Im}\xi_{i+1}$.

Якщо α_1 *монік, то й* $\bar\alpha_1$ *монік, а якщо* γ_2 *епік, то й* $\bar\beta_2$ *епік.*

Доведення. 1. Побудова δ. Нехай $a_3 \in \operatorname{Ker}\xi_3$. Існує $a_2 \in A_2$ такий, що $a_3 = \alpha_2(a_2)$. Оскільки $\gamma_2\xi_2(a_2) = \xi_3\alpha_2(a_2) = \xi_3(a_3) = 0$, то $\xi_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$ для деякого, однозначно визначеного, $b_1 \in B_1$. Перевіримо, що клас $b_1 + \operatorname{Im}\xi_1 \in \operatorname{Coker}\xi_1$ не залежить від вибору прообразу a_2. Дійсно, нехай також $a_3 = \alpha_2(a_2')$. Тоді $\alpha_2(a_2' - a_2) = 0$, отже $a_2' - a_2 = \alpha_1(a_1)$ для деякого $a_1 \in A_1$. Тоді $\xi_2(a_2' - a_2) = \xi_2\alpha_1(a_1) = \gamma_1\xi_1(a_1)$. Тому, якщо $\xi_2(a_2') = \gamma_1(b_1')$, то $\gamma_1(b_1' - b_1) = \gamma_1\xi_1(a_1)$, звідки $b_1' - b_1 = \xi(a_1) \in \operatorname{Im}\xi_1$, отже $b_1' + \operatorname{Im}\xi_1 = b_1 + \operatorname{Im}\xi_1$. Визначимо $\delta(a_3) = b_1 + \operatorname{Im}\xi_1$.

2. Точність пари $\bar\alpha_2, \delta$. Якщо $a_3 = \alpha_2(a_2)$, де $a_2 \in \operatorname{Ker}\xi_2$, то $\xi_2(a_2) = 0 = \gamma_1(0)$. Отже, за побудовою δ, $\delta(a_3) = 0 + \operatorname{Im}\xi_1 = 0$, тобто $\operatorname{Im}\bar\alpha_2 \subseteq \operatorname{Ker}\delta$. Нехай тепер $\delta(a_3) = 0$. Це означає, що якщо $a_3 = \alpha_2(a_2)$, то $\xi_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$, де $b_1 \in \xi_1$, тобто $b_1 = \xi_1(a_1)$ для деякого $a_1 \in A_1$. Тоді $\gamma_1(b_1) = \gamma_1\xi_1(a_1) = \xi_2\alpha_1(a_1)$, звідки $\xi_2(a_2 - \alpha_1(a_1)) = 0$. Але $\alpha_2\alpha_1(a_1) = 0$, тому $\alpha_2(a_2 - \alpha_1(a_1)) = \alpha_2(a_2) = a_3$, тобто $a_3 \in \operatorname{Im}\bar\alpha_2$. Отже $\operatorname{Ker}\delta =\in \bar\alpha_2$.

3. Точність пари $\delta, \bar\beta_1$. Якщо $b_1 + \operatorname{Im}\xi_1 = \delta(a_3)$, то $\gamma_1(b_1) = \xi_2(a_2)\operatorname{Im}\xi_2$ для такого a_2, тому $\bar\beta_1(b_1 + \operatorname{Im}\xi_1) = 0$. Отже $\operatorname{Im}\delta \subseteq \operatorname{Ker}\bar\beta_1$. Навпаки, нехай $\bar\beta_1(b_1 + \operatorname{Im}\xi_1) = 0$. Це означає, що $\gamma_1(b_1) = \xi_2(a_2)$ для деякого $a_2 \in A_2$. Тоді $\xi_3\alpha_2(a_2) = \gamma_2\xi_2(a_2) = \gamma_2\gamma_1(b_1) = 0$,

тобто $a_3 = \alpha_2(a_2) \in \operatorname{Ker} \xi_2$. Але $b_1 + \operatorname{Im} \xi_1 = \delta(a_3)$ за побудовою δ. Отже $\operatorname{Ker} \bar{\beta}_1 = \operatorname{Im} \delta$.

Перевірку точності інших пар залишаємо читачеві як легку вправу. Останнє твердження леми очевидне. □

long **Теорема 1.4.** *Нехай*

e5 (1.1) $$0 \to A^\bullet \xrightarrow{\alpha} B^\bullet \xrightarrow{\gamma} C^\bullet \to 0$$

точна послідовність комплексів. Тоді існують морфізми $\delta^i : H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet)$ *такі, що всі послідовності*

e6 (1.2) $$\begin{gathered} H^i(A^\bullet) \xrightarrow{H^i(\alpha)} H^i(B^\bullet) \xrightarrow{H^i(\gamma)} H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} \\ \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\alpha)} H^{i+1}(B^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\gamma)} H^{i+1}(C^\bullet) \end{gathered}$$

є точними.

Доведення. З точності послідовності (1.1) випливає, що існує комутативна діаграма з точними рядками

$$\begin{tikzcd} & A^i/\operatorname{Im} d_A^{i-1} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\bar{d}_A^i"'] & B^i/\operatorname{Im} d_B^{i-1} \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\bar{d}_B^i"'] & C^i/\operatorname{Im} d_C^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_C^i"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^{i+1} \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & \operatorname{Ker} d_B^{i+1} \arrow[r, "\bar{\beta}"'] & \operatorname{Ker} d_C^{i+1}, & \end{tikzcd}$$

в якій горизонтальні морфізми індуковані морфізмами α, γ, а вертикальні — диференціалами відповідних комплексів. Легко бачити, що $\operatorname{Ker} \bar{d}_A^i = H^i(A^\bullet)$, $\operatorname{Coker} \bar{d}_A^i = H^{i+1}(A^\bullet)$ і аналогічні формули вірні для комплексів $B^\bullet$ і $C^\bullet$. Тепер існування морфізму δ^i й точної послідовності (1.2) випливає з леми про змію. □

Зауваження 1.5. Очевидно, всі послідовності (1.2) можна склеїти в одну *довгу послідовність когомологій*, яка об'єднує всі когомології компдексів $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet$:

$$\begin{gathered} \ldots \to H^{i-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(A^\bullet) \xrightarrow{H^i(\alpha)} H^i(B^\bullet) \xrightarrow{H^i(\gamma)} H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} \\ \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\alpha)} H^{i+1}(B^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\gamma)} H^{i+1}(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i+1}} H^{i+2}(A^\bullet) \to \ldots \end{gathered}$$

exact **Наслідок 1.6.** *Якщо* (1.1) *— точна послідовність комплексів і два з комплексів* $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet$ *є точними, то й третій є точним.*

`3x3` **Вправа 1.7.** Нехай

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

— комутативна діаграма з точними рядками. Доведіть, що:

(1) Якщо перші два стовпчики є точними, то й останній стовпчик є точним.
(2) Якщо останні два стовпчики є точними, то й перший стовпчик є точним.
(3) Якщо перший і останній стовпчики є точними, а $\gamma\alpha = 0$, то й середній стовпчик є точним.

`4hom` **Лема 1.8** (Лема про 4 гомоморфізми)**.** *Нехай дано комутативну діаграму*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\xi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\xi_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\xi_3"'] & A_4 \arrow[d, "\xi_4"'] \\
B_1 \arrow[r, "\gamma_1"] & B_2 \arrow[r, "\gamma_2"] & B_3 \arrow[r, "\gamma_3"] & B_4.
\end{tikzcd}$$

(1) *Припустимо, що*
  (a) ξ_2 *і* ξ_4 *— моніки,*
  (b) ξ_1 *— епік,*
  (c) $\alpha_2\alpha_1 = 0$,
  (d) $\operatorname{Ker}\alpha_3 \subseteq \operatorname{Im}\alpha_2$ *і* $\operatorname{Ker}\gamma_2 \subseteq \operatorname{Im}\gamma_1$.
  Тоді ξ_3 *— монік.*
(2) *Припустимо, що*
  (a) ξ_1 *і* ξ_3 *— епіки,*
  (b) ξ_4 *— монік,*
  (c) $\gamma_3\gamma_2 = 0$,
  (d) $\operatorname{Ker}\alpha_3 \subseteq \operatorname{Im}\alpha_2$ *і* $\operatorname{Ker}\gamma_2 \subseteq \operatorname{Im}\gamma_1$.
  Тоді ξ_2 *— епік.*

Зауважимо, що умови (c) і (d) виконуються, якщо рядки є точними.

Доведення. Ми доведемо твердження (2) і залишимо твердження (1) як вправу.

Нехай $b_2 \in B_2$. Існує $a_3 \in A_3$ такий, що $\gamma_2(b_2) = \xi_3(a_3)$. Тоді $\xi_4\alpha_3(a_3) = \gamma_3\xi_3(a_3) = \gamma_3\gamma_2(b_2) = 0$, тому й $\alpha_3(a_3) = 0$ і $a_3 = \alpha_2(a_2)$ для деякого $a_2 \in A_2$. Звідси $\gamma_2(b_2 - \xi_2(a_2)) = \xi_3(a_3) - \xi_3\alpha_2(a_2) = 0$, а тоді $b_2 - \xi_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$ для деякого $b_1 \in B_1$. Існує $a_1 \in A_1$ такий, що $b_1 = \xi_1(a_1)$. Тому $b_2 = \xi_2(a_2) + \gamma_1(b_1) = \xi_2(a_2) + \gamma_1\xi_1(a_1) = \xi_2(a_2 + \alpha_1(a_1))$. Отже, ξ_2 — епік. □

5hom **Наслідок 1.9** (Лема про 5 гомоморфізмів). *Нехай дано комутативну діаграму з точними рядками.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\xi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\xi_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5.
\end{tikzcd}$$

(1) *Якщо ξ_2 і ξ_4 — моніки, а ξ_5 — епік, то й ξ_3 — монік.*
(2) *Якщо ξ_2 і ξ_4 — епіки, а ξ_1 — монік, то й ξ_3 — епік.*
(3) *Якщо ξ_2 і ξ_4 — ізоморфізми, ξ_1 — монік, а ξ_5 — епік, то й ξ_3 — ізоморфізм.*

2. Триангульовані категорії

tri **Означення 2.1.** *Триангульована категорія* — це адитивна категорія $\mathscr{T}$ разом з автоморфізмом, який ми позначаємо $A \mapsto A[1]$, і класом *точних трикутників*, тобто послідовностей вигляду

e1 (2.1) $$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\gamma} A[1],$$

які задовольняють наступним вимогам:

(T0) Якщо в комутативній діаграмі

e2 (2.2) $$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta"'] & A[1] \arrow[d, "\xi[1]"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B \arrow[r, "\gamma'"] & C \arrow[r, "\gamma'"] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

перший рядок є точним трикутником, а ξ, η, ζ — ізоморфізми, то другий рядок також є точним трикутником.

(T1) Для кожного морфізму $\alpha : A \to B$ існує точний трикутник (2.1).

(T2) Трикутник $A \xrightarrow{1_A} A \to 0 \to A[1]$ є точним.

(T3) (*Аксіома зсуву*) Трикутники $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ і $B \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\gamma} A[1]A \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1]$ є точними одночасно.

(T4) (*Аксіому морфізму*) Якщо

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[r, "\gamma"] & A[1] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B \arrow[r, "\gamma'"] & C \arrow[r, "\gamma'"] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

— комутативна діаграма, рядки якої є точними трикутниками, існує морфізм $\zeta : C \to C'$ такий, що діаграма (2.2) є комутативною.

(T5) (*Аксіома октаедра*) Для кожної пари морфізмів $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\xi} B_1$ існує комутативна діаграма

e3 (2.3)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\xi"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\xi'"'] & A[1] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\eta"'] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\eta'"'] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
 & B_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\zeta"'] & B_2 \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\zeta'"] & B[1] \\
 & B[1] \arrow[r, "\gamma[1]"'] & C[1], &
\end{tikzcd}$$

в якій перші два рядки, а також другий і третій стовпчики є точними трикутниками.

Деякі прості властивості триангульованих категорій.

pr1 **Твердження 2.2.** *Якщо* (2.1) *— точний трикутник, то* $\gamma\alpha = 0$, $\gamma\gamma = 0$, $\alpha[1]\gamma = 0$.

Доведення. Доведемо першу рівність; дві інші тоді випливають з неї та аксіоми зсуву. Для цього розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r] & A[1] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, "\gamma"] & A[1].
\end{tikzcd}$$

В ній обидва рядки — точні трикутники. За аксіомою морфізму, існує морфізм $0 \to C$, який робить всю діаграму комутативною. Звідси $\gamma\alpha = 0$. □

pr2 **Твердження 2.3.** *Якщо* (2.1) *— точний трикутник, то для кожного об'єкта* $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{T}$ *наступні послідовності абелевих груп є точними:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T, A) \xrightarrow{\alpha\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T, B) \xrightarrow{\gamma\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T, C) \xrightarrow{\gamma\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T, A[1]),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(A[1], T) \xrightarrow{\cdot\gamma} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(C, T) \xrightarrow{\cdot\gamma} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(B, T) \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(A, T).$$

Доведення. Доведемо, що $\mathrm{Ker}(\gamma\cdot) = \mathrm{Im}(\alpha\cdot)$. Тоді точність першої послідовності випливає звідси й з аксіоми зсуву. Точність другої доводиться аналогічно (або посиланням на дуальну категорію $\mathscr{T}^{\mathrm{op}}$).

Оскільки $\gamma\alpha = 0$, то $\operatorname{Im}(\alpha\cdot) \subseteq \operatorname{Ker}(\gamma\cdot)$. Навпаки, нехай $\eta \in \operatorname{Ker}(\gamma\cdot)$, тобто $\gamma\eta = 0$. Тоді маємо комутативну діаграму, в якій обидва рядки — точні трикутники:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, equal] & T \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T[1] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\gamma"] & C \arrow[r, "\gamma"] & A[1].
\end{tikzcd}$$

За аксіомою морфізму (разом з аксіомою зсуву), існує $\xi : T \to A$, який зберігає комутативність. Це означає, що $\eta = \alpha\xi \in \operatorname{Im}(\alpha\cdot)$. $\square$

pr3 **Твердження 2.4.** *Якщо в комутативній діаграмі* (2.2) *обидва рядки є точними трикутниками, а два з морфізмів ξ, η, ζ є ізоморфізмами, то й третій з цих морфізмів є ізоморфізмом.*

Доведення. Знову, завдяки аксіомі зсуву, достатньо довести, що коли ξ й η — ізоморфізми, то й ζ — ізоморфізм. З твердження 2.3 і аксіоми зсуву випливає, що для будь-якого $T \in \operatorname{Ob} \mathscr{T}$ в наступній діаграмі обидва рядки точні:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(T,A) \arrow[r, "\alpha\cdot"] \arrow[d, "\xi\cdot"'] & \operatorname{Hom}(T,B) \arrow[r, "\gamma\cdot"] \arrow[d, "\eta\cdot"'] & \operatorname{Hom}(T,C) \arrow[r, "\gamma\cdot"] \arrow[d, "\zeta\cdot"'] & \operatorname{Hom}(T,A[1]) \arrow[r, "\alpha[1]\cdot"] \arrow[d, "\xi[1]\cdot"] & \operatorname{Hom}(T,B[1]) \arrow[d, "\eta[1]\cdot"] \\
\operatorname{Hom}(T,A') \arrow[r, "\alpha'\cdot"] & \operatorname{Hom}(T,B') \arrow[r, "\gamma'\cdot"] & \operatorname{Hom}(T,C') \arrow[r, "\gamma'\cdot"] & \operatorname{Hom}(T,A'[1]) \arrow[r, "\alpha'[1]\cdot"] & \operatorname{Hom}(T,B'[1])
\end{tikzcd}$$

$\square$

Всі вертикальні гомоморфізми в ній, крім, можливо, $\zeta\cdot$, є ізоморфізмами. За лемою про 5 гомоморфізмів, $\zeta\cdot$ також є ізоморфізмом. Отже, морфізм представних функторів $\mathscr{T}_\zeta : \mathscr{T}_C \to \mathscr{T}_{C'}$ є ізоморфізмом. За лемою Йонеди, ζ також є ізоморфізмом.

iso-cone **Наслідок 2.5.** *Якщо $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ і $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma}{}' C' \xrightarrow{\gamma}{}' A[1]$ — два точні трикутники, які починається з α, існує ізоморфізм $\zeta : C \xrightarrow{\sim} C'$, який робить діаграму*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta"'] & A[1] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\gamma'"] & C' \arrow[r, "\gamma'"] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

комутативною. Отже, точний трикутник, який починається з α визначений з точністю до ізоморфізму.

Зауваження 2.6. (1) Ізоморфізм ζ у наслідку 2.5 може бути не єдиним. Отже, хоча ці точні трикутники й ізоморфні, цей ізоморфізм не є канонічним.
(2) Досі ми не користувалися аксіомою октаедра. Тому з Наслідку 2.5 випливає, що в аксіомі октаедра трикутники, які починаються з α, α_1 і ξ можна брати довільними. Найчастіше її формулюють саме так.

pr4 **Твердження 2.7.** *Трикутники* (2.1) *та* $A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1] \xrightarrow{-\gamma[1]} C \xrightarrow{-\gamma[1]} A[2]$ *є точними одночасно.*

Доведення. Треба тричі застосувати аксіому зсуву. □

pr5 **Теорема 2.8** (Вердьє). *Якщо діаграма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[d, "\eta"] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \end{tikzcd}$$

є комутативною, то існує діаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta"'] & A[1] \arrow[d, "\xi[1]"] \\ A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\xi'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\eta'"'] & C' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\zeta'"'] & A'[1] \arrow[d, "\xi'[1]"] \\ A'' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\xi''"'] & B'' \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\eta''"'] & C'' \arrow[r, "\gamma''"] \arrow[d, "\zeta''"'] & A''[1] \arrow[d, "\xi''[1]"] \\ A[1] \arrow[r, "\alpha[1]"'] & B[1] \arrow[r, "\gamma[1]"'] & C[1] \arrow[r, "\gamma[1]"'] & A[2], \end{tikzcd}$$

в якій перші три рядки й перші три стовпчики — точні трикутники, а всі квадрати комутують, крім правого нижнього, який антикомутує (*тобто* $\gamma[1]\zeta'' = -\zeta''[1]\gamma''$).

Зауваження 2.9. *Останні рядок і стовпчик цієї діаграми можуть не бути точними трикутниками.* З аксіоми зсуву випливає лише, що точним є, наприклад, трикутник $A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1] \xrightarrow{-\gamma[1]} C[1] \xrightarrow{-\gamma[1]} A[2]$.

Доведення. Перші два рядки і перші два стовпчики — це точні трикутники, які починаються, відповідно, з α, α' і ξ, η. За аксіомою морфізму, існують α'' та ζ, які роблять відповідні квадрати комутативними. Застосуємо аксіому октаедра до морфізмів α та η. Одержимо комутативну діаграму, в якій рядки і стовпчики — точні трикутники:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta_1"'] & A[1] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha_1"] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\eta'"'] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\zeta_2"'] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
 & B'' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta''"'] & B'' \arrow[r, "\eta''"] \arrow[d, "\zeta_3"] & B[1] \\
 & B[1] \arrow[r, "\gamma[1]"'] & C[1], &
\end{tikzcd}
$$

де $\alpha_1 = \eta\alpha = \alpha'\xi$. Тепер застосуємо аксіому октаедра до пари морфізмів ξ, α'. Одержимо комутативну діаграму в якій рядки і стовпчики — точні трикутники:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, equal] & A' \arrow[r, "\xi'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A'' \arrow[r, "\xi''"] \arrow[d, "\alpha'_1"'] & A[1] \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, "\alpha_1"] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta'"'] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\beta'_1"'] & A[1] \arrow[d, "\xi[1]"] \\
 & C' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma'"'] & C' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\gamma'_1"] & A'[1] \\
 & A'[1] \arrow[r, "\xi'[1]"'] & A''[1]. &
\end{tikzcd}
$$

Нарешті, застосуємо аксіому октаедра до пари морфізмів $\zeta_2\alpha'_1$, позначивши $\alpha'' = \zeta_2\alpha'_1$. Одержимо комутативну діаграму в якій рядки і стовпчики — точні трикутники:

$$
\begin{tikzcd}
A'' \arrow[r, "\alpha'_1"] \arrow[d, equal] & C_1 \arrow[r, "\beta'_1"] \arrow[d, "\zeta_2"'] & C' \arrow[r, "\gamma'_1"] \arrow[d, "\zeta'"'] & A''[1] \arrow[d, equal] \\
A'' \arrow[r, "\alpha''"] & B'' \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\zeta_3"'] & C'' \arrow[r, "\gamma''"] \arrow[d, "\zeta''"'] & A''[1] \arrow[d, "\alpha'_1[1]"] \\
 & C[1] \arrow[r, equal] \arrow[d, "-\zeta_1[1]"'] & C[1] \arrow[r, "-\zeta[1]"] \arrow[d, "\zeta[1]"] & C_1[1] \\
 & C_1[1] \arrow[r, "\gamma'_1[1]"'] & C'[1]. &
\end{tikzcd}
$$

(треба врахувати аксіому зсуву). Отже, всі необхідні трикутники побудовані. Залишилося перевірити умови комутування. Для перших двох рядків і стовпчиків вони вже були виконані. Далі маємо:

$$\begin{aligned} \zeta'\beta' &= \zeta'\beta_1'\beta_1 = \beta''\zeta_2\beta_1 = \beta''\eta', \\ \gamma''\zeta' &= \gamma_1' = \xi'[1]\gamma', \\ \gamma[1]\eta'' &= \zeta_3 = \zeta''\gamma'', \\ \xi''[1]\gamma'' &= \gamma_1[1]\alpha_1'[1]\gamma'' = -\gamma_1[1]\zeta[1]\zeta'' = -\gamma[1]\zeta''. \end{aligned}$$

(Читач має перевірити, звідки походять всі рівності!) □

KA-tri **Теорема 2.10.** *Гомотопічна категорія $\mathscr{K}\mathscr{A}$, де $\mathscr{A}$ — адитивна категорія, є триангульованою.*

Доведення. (T1) виконується за означенням.

(T2) випливає з того, що $1_{\operatorname{Con} 1_A} \sim 0$; гомотопія задається морфізмом $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) : A[1] \oplus A[2] \to A \oplus A[1]$.

(T3) Можна вважати, що перший трикутник — це конічний трикутник, тобто $C = \operatorname{Con}\alpha$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & A[1] \arrow[r, "-\alpha[1]"] \arrow[d, "\xi"'] & B[1] \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\gamma"'] & C \arrow[r, "\gamma'"'] & C' \arrow[r, "\alpha'"'] & B[1], \end{tikzcd}$$

де нижній рядок — теж конічний трикутник, тобто $C' = \operatorname{Con}\gamma$, $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, а $\xi = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & \alpha[1] \end{smallmatrix}\right)$. Тоді $\alpha'\xi = -\alpha[1]$, а $\xi\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\alpha[1] \end{pmatrix} \sim \gamma'$. А саме, гомотопію $\xi\gamma - \gamma' \sim 0$ задає морфізм $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Нехай $\xi' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : C' \to A[1]$. Тоді $\xi'\xi = 1$, а $\xi\xi' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha[1] & 0 \end{pmatrix} \sim 1$. Побудову гомотопії $\xi\xi' - 1 \sim 0$ залишаємо як нескладну вправу.

(T4) Можна вважати, що $C = \operatorname{Con}\alpha$, $C' = \operatorname{Con}\alpha'$. Тоді можна покласти $\zeta = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \zeta[1] \end{pmatrix}$.

(T5) Нехай $C = \operatorname{Con}\alpha$, $C_1 = \operatorname{Con}\alpha_1$, де $\alpha_1 = \xi\alpha$, $B_2 = \operatorname{Con}\xi$, $\gamma, \gamma, \gamma_1, \gamma_1$ і η визначаються, як у конічних трикутниках, $\xi' = \left(\begin{smallmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C_2 = \operatorname{Con}\xi'$, $\eta_1 : C_1 \to C_2$ і $\zeta_1 : C_2 \to C[1]$ також визначаються, як у конічному трикутнику. У матричному вигляді $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\zeta_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Визначимо також $\gamma_2 : B_2 \to C_2$ матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (це фактично єдиний «природній» морфізм $\operatorname{Con}\eta \to \operatorname{Con}\xi'$. Неважко переконатися, що діаграма

e4 (2.4)
$$
\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\gamma} & C & \xrightarrow{\gamma} & A[1] \\
\| & & {\scriptstyle\xi}\downarrow & & {\scriptstyle\xi'}\downarrow & & \| \\
A & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & A[1] \\
 & & {\scriptstyle\eta}\downarrow & & {\scriptstyle\eta_1}\downarrow & & \\
 & & B_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & C_2 & & \\
 & & {\scriptstyle\zeta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\zeta_1} & & \\
 & & B[1] & \xrightarrow[\gamma[1]]{} & C[1], & &
\end{array}
\tag{2.4}
$$

є комутативною. Доведемо, що γ_2 — ізоморфізм у гомотопічній категорії. Для цього розглянемо морфізм $\gamma' : C_2 \to B_2$, заданий матрицею $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тоді $\gamma'\gamma_2 = 1_{B_2}$, а $\gamma_2\gamma' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Але $\gamma_2\gamma' \sim 1_{C_2}$: гомотопія $\gamma_2\gamma' - 1 \sim 0$ задається матрицею $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (це також фактично єдина природна можливість). Отже, третій стовпчик діаграми (2.4) можна замінити точним трикутником $C \xrightarrow{\xi'} C_1 \xrightarrow{\eta'} B_2 \xrightarrow{\zeta'} C[1]$, де $\eta' = \gamma'\eta_1$, а $\zeta' = \zeta_1\gamma_2$. Знов-таки, легко переконатися, що тоді діаграма (2.3) буде комутативною. □

sec3

3. Теорема Моріти

Ми встановимо критерій того, що задана категорія еквівалентна категорії модулів, а також критерій еквівалентності категорій модулів над різними кільцями (або адитивними категоріями). Нагадаємо спершу означення проективних і ін'єктивних об'єктів.

pro **Твердження 3.1.** *Нехай P — об'єкт абелевої категорії $\mathscr{A}$. Наступні умови рівносильні:*

(1) *Кожен епік $\alpha : A \to P$ є* розщеплюваним, *тобто має* правий обернений *(такий морфізм $\alpha' : P \to A$, що $\alpha\alpha' = 1_P$)).*
(2) *Якщо $\alpha : A \to B$ — епік, то для будь-якого морфізму $\gamma : P \to B$ існує $\gamma' : P \to A$ такий, що $\gamma = \alpha\gamma'$.*

Якщо ці умови виконуються, об'єкт P зветься проективним.

Доведення. (2)⇒(1) Достатньо покласти $B = P$ і $\gamma = 1_P$.

(1)⇒(2) Розглянемо морфізм $\gamma = \begin{pmatrix}\alpha & -\gamma\end{pmatrix} : A \oplus P \to B$. Нехай $\tilde{\gamma} : \tilde{A} \to A \oplus P$ — коядро γ, $\tilde{\alpha} = \pi_2\tilde{\gamma}$ і $\tilde{\beta} = \pi_1\tilde{\gamma}$, де π_1, π_2 — проекції $A \oplus P$, відповідно, на A і на P. Тоді $\alpha\tilde{\beta} - \gamma\tilde{\alpha} = \gamma\tilde{\gamma} = 0$, тобто $\alpha\tilde{\beta} = \gamma\tilde{\alpha}$. Крім того, оскільки α епік, то й γ епік, а тому $\gamma = \operatorname{Coker}\tilde{\gamma}$. Якщо $\xi\tilde{\alpha} = \xi\pi_1\tilde{\gamma} = 0$, то $\xi\pi_1 = \xi'\gamma$ для деякого $\xi' : B \to A \oplus P$.

Але, у матричному запису, $\xi\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \xi \end{pmatrix}$, а $\xi'\gamma = \begin{pmatrix} \xi'\alpha & \xi'\gamma \end{pmatrix}$. Отже $\xi'\alpha = 0$, звідки $\xi' = 0$, оскільки α — епік, а тоді й $\xi = 0$, тобто $\tilde{\alpha}$ — епік. З умови (1) випливає, що існує $\tilde{\alpha}'$ такий, що $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}' = 1_P$, а тоді $\gamma = \gamma\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}' = \alpha\gamma'$, де $\gamma' = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}'$. □

Вірним є й дуальне твердження.

inj

Твердження 3.2. *Нехай I — об'єкт абелевої категорії $\mathscr{A}$. Наступні умови рівносильні:*

1. *Кожен монік $\alpha : A \to I$ є* розщеплюваним*, тобто має* лівий обернений *(такий морфізм $\alpha' : I \to A$, що $\alpha'\alpha = 1_I$)).*
2. *Якщо $\alpha : A \to B$ — монік, то для будь-якого морфізму $\gamma : B \to I$ існує $\gamma' : A \to I$ такий, що $\gamma = \alpha\gamma'\alpha$.*

Якщо ці умови виконуються, об'єкт P зветься ін'єктивним.

Очевидно, якщо $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — еквівалентність абелевих категорій, об'єкт $P \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$ проективний, а об'єкт $I \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$ ін'єктивний, то FP — також проективний, а FI — ін'єктивний.

gen

Означення 3.3. Множина M об'єктів категорії $\mathscr{A}$ зветься *множиною твірних*, якщо для кожної пари морфізмів $\alpha, \gamma : A \to B$, де $\alpha \neq \gamma$, знайдеться морфізм $\gamma : C \to A$, де $C \in \mathsf{M}$, для якого $\alpha \geqslant\neq \gamma\gamma$. Якщо $\mathsf{M} = \{M\}$, об'єкт M зветься *твірним* категорії $\mathscr{A}$.

Очевидно, якщо категорія $\mathscr{A}$ предадитивна, достатньо перевірити, що для $\alpha \neq 0$ існує $\gamma : C \to A$, для якого $\alpha\gamma \neq 0$. Якщо в категорії $\mathscr{A}$ існує кодобуток $M = \coprod_{C \in \mathsf{M}} C$, ця множина є множиною твірних тоді й лише тоді, коли об'єкт M є твірним. Також очевидно, що еквівалентність категорій переводить множину твірних у множину твірних.

Приклад 3.4. У категорії модулів $\mathscr{A}$-Mod над предадитивною категорією $\mathscr{A}$ множина представних функторів $\{\, \mathscr{A}^A \mid A \in \operatorname{Ob}\mathscr{A} \,\}$ є множиною твірних. Дійсно, нехай $\alpha : F \to G$ — ненульовий морфізм функторів з $\mathscr{A}$-Mod. Існує об'єкт A й елемент $a \in F(A)$, для якого $\alpha(A)a \neq 0$. Цей елемент визначає морфізм $\gamma : \mathscr{A}^A \to F$, при якому $a = \gamma(A)1_A$. Тоді $\alpha\gamma(A)1_A = \alpha(A)a \neq 0$, тобто $\alpha\gamma \neq 0$.

Зокрема, в категорії модулів над кільцем $\boldsymbol{A}$ регулярний модуль ${}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ є твірним.

genab

Твердження 3.5. *Нехай $\mathscr{A}$ — адитивна категорія, в якій кожна сім'я об'єктів має кодобуток. Множина M є множиною твірних тоді й лише тоді, коли для кожного об'єкта $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$ існує епік $\coprod_{C \in \mathsf{S}} C \to A$, де S — деяка сім'я об'єктів з множини M.*

Доведення. Очевидно, ця умова є достатньою. Навпаки, нехай M — множина твірних і A — довільний об'єкт. Для кожного морфізму $\alpha : A \to B$ фіксуємо морфізм $\beta_\alpha : M_\alpha \to A$, для якого $\alpha\beta_\alpha \neq 0$. Позначимо $M = \coprod_\alpha M_\alpha$. Тоді $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A) = \prod_\alpha \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M_\alpha, A)$.

Розглянемо морфізм $\beta : M \to A$, компоненти якого — це β_α. Для кожного морфізму $\beta : A \to B$ компонента з номером α морфізму $\alpha\beta$ — це $\alpha\beta_\alpha \neq 0$. Отже $\alpha\beta \neq 0$ і β — це епік. $\square$

genres **Лема 3.6** (Лема про резольвенти)**.** *Нехай $\mathscr{A}$ — абелева категорія.*

(1) *За умов Твердження 3.5 для кожного об'єкта $A \in \mathscr{A}$ існує точна послідовність*

resolv (3.1) $$\dots C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} A \to 0,$$

де всі об'єкти C_i є кодобутками об'єктів з множини M.

Така послідовність зветься M-*резольвентою* об'єкта A.

(2) *Припустимо, що всі об'єкти з* M *проективні. Нехай* (3.1) *—* M-*резольвента об'єкта A, а*

$$\dots C'_n \xrightarrow{d'_n} C'_{n-1} \dots \xrightarrow{d'_2} C'_1 \xrightarrow{d'_1} C'_0 \xrightarrow{d'_0} A' \to 0$$

— довільна точна послідовність. Для кожного морфізму $\alpha : A \to A'$ існують морфізми $\alpha_i : C_i \to C'_i$, які роблять діаграму

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & \dots \arrow[r, "d_2"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & C_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & \dots \arrow[r, "d'_2"] & C'_1 \arrow[r, "d'_1"] & C'_0 \arrow[r, "d'_0"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

комутативною.

Набір $\{\alpha_i\}$ *зветься* продовженням морфізму α на M-резольвенту.

(3) *Якщо в умовах попереднього пункту $\{\alpha_i\}$ і $\{\alpha'_i\}$ — два продовження морфізму α на резольвенту, то існують морфізми $s_i : C_i \to C'_{i+1}$ такі, що $\alpha_0 - \alpha'_0 = d'_1 s_0$ і $\alpha_i - \alpha'_i = d'_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i$ для всіх $i > 0$.*

Інакше кажучи, ці два продовження *гомотопні* в категорії комплексів.

Доведення. (1) — безпосередній наслідок Твердження 3.5.

(2) Позначимо $\xi_n : B_n \to C'_n$ ядро d'_n, а $\eta_n : C'_{n+1} \to B_n$ образ d'_{n+1} (точність означає, що об'єкт B можна вважати спільним). Оскільки C_0 проективний, а d'_0 епік, існує морфізм $\alpha_0 : C_0 \to C'_0$ такий, що $\alpha d_0 = d'_0 \alpha_0$. Далі побудову морфізмів α_i проведемо рекурсивно. Припустимо, що $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ вже побудовані. Оскільки $d'_n \alpha_n d_{n+1} = \alpha_{n-1} d_n d_{n+1} = 0$, існує морфізм $\beta_n : C_{n+1} \to B_n$ такий, що $\alpha_n d_{n+1} = \xi_n \beta_n$. Оскільки C_{n+1} проективний, а η_n — епік, існує α_{n+1} такий, що $\beta_n = \eta_n \alpha_{n+1}$. Звідси $d'_{n+1}\alpha_{n+1} = \xi_n \eta_n \alpha_{n+1} = \xi_n \beta_n = \alpha_n d_{n+1}$. Отже ми побудували наступний морфізм, що й завершує доведення.

(3) Ми зберігаємо позначення з попереднього пункту доведення. Набір $\{\gamma_i\}$, де $\gamma_i = \alpha_i - \alpha'_i$, є продовженням нульового морфізму. Зокрема, $d'_0\gamma_0 = 0$, тому $\gamma_0 = \xi_0\beta_0$, де $\beta_0 : {}_0 \to B_0$. Оскільки C_0 проективний, $\beta_0 = \eta_0 s_0$ для деякого $s_0 : C_0 \to C'_1$. Звідси $\gamma_0 = \xi_0\eta_0 s_0 = d'_0 s_0$. Далі знов-таки будуємо s_i рекурсивно. Якщо $s_0, s_1, \dots, s_n$ вже побудовані, то $d'_{n+1}(\gamma_{n+1} - s_n d_{n+1}) = d'_{n+1}\gamma_{n+1} - d'_{n+1}s_n d_{n+1} = \gamma_n d_{n+1} - \gamma_n d_{n+1} + s_{n-1}d_n d_{n+1} = 0$. Тому $\gamma_{n+1} - s_n d_{n+1} = \xi_{n+1}\beta_n$ для деякого $\beta_n : C_{n+1} \to B_{n+1}$. З проективності C_{n+1} випливає, що $\beta_{n+1} = \eta_{n+1}s_{n+1}$ для деякого $s_{n+1} : C_{n+1} \to C_{n+2}$. Отже $\gamma_{n+1} - s_n d_{n+1} = \xi_{n+1}\eta_{n+1}s_{n+1} = d'_{n+1}s_{n+1}$, тобто наступний морфізм побудовано. □

`com` **Означення 3.7.** Об'єкт $C \in \mathscr{A}$ зветься *компактним*, або *малим*, якщо кожного разу, коли існує кодобуток $\coprod_{A\in\mathsf{A}} A$ деякої сім'ї A об'єктів з $\mathscr{A}$, канонічне відображення $\theta(C,\mathsf{A}) : \coprod_{A\in\mathsf{A}} \mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(C, \coprod_{A\in\mathsf{A}} A)$, яке переводить набір (α_A) в $\sum_A \varepsilon_A\alpha_A$ є бієктивним.

Зауважимо, що це відображення завжди є ін'єктивним, тому перевіряти треба лише його сюр'єктивність. Зауважимо також, що якщо $\alpha = \sum_A \varepsilon_A\alpha_A$, то $\alpha_A = \pi_A\alpha$, звідки випливає, що $\alpha = \sum_A \varepsilon_A\pi_A\alpha$, причому $\pi_A\alpha = 0$ майже для всіх A.

Приклад 3.8. Якщо модуль $C \in \mathscr{A}$-Mod має скінченну множину твірних $\{ {}_1, {}_2, \dots, {}_m \}$, він є компактним об'єктом у категорії модулів. Дійсно, нехай $c_i \in C(X_i)$, а $\alpha : \ \to S = \coprod_{A\in\mathsf{A}} A$ — довільний морфізм. Позначимо $a_i = \alpha(X_i)c_i \in S(X_i)$. Оскільки $S(X_i) = \coprod_{A\in\mathsf{A}} A(X_i)$, існує скінченний набір $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \} \subseteq \mathsf{A}$ такий, що кожен елемент a_i належить підгрупі $\bigoplus_{j=1}^n A_j(X_i)$. Але тоді $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \bigoplus_{j=1}^n \mathrm{Hom}(C, A_i)$, а тому $\alpha = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{A_j}\pi_{A_j}\alpha$, тобто $\alpha \in \mathrm{Im}\,\gamma(C,\mathsf{A})$.

Зауваження 3.9. Те, що модуль має скінченну множину твірних є достатньою, але не необхідною умовою того, що від є компактним в категорії модулів. Наступне твердження показує, що воно, тим не менш, є необхідним, якщо модуль є проективним.

`profin` **Твердження 3.10.** *Проективний модуль P є компактним тоді й лише тоді, коли він має скінченну множину твірних.*

Доведення. Кожен модуль ізоморфний фактору кодобутку представних модулів, отже існує епік $\alpha : M = \coprod_{A\in\mathsf{S}} \mathscr{A}^A \to P$. Оскільки P проективний, існує $\alpha' : P \to M$, для якого $\alpha\alpha' = 1_P$. Якщо P компактний, $\alpha' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{A_i}\alpha'_i$ для деякого скінченного набору морфізмів $\alpha'_i : P \to A_i$, де $A_i \in \mathsf{S}$. Тоді $\alpha = 1_P\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i\alpha'_i$, де $\alpha_i = \alpha\varepsilon_i : \mathscr{A}^{A_i} \to P$. Отже, $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \sum_{i=1}^n \mathrm{Im}\,\alpha_i$. Оскільки кожен $\mathrm{Im}\,\alpha_i$ породжений одним елементом $\alpha_i(A_i)1_{A_i}$, модуль P є скінченно породженим. □

progen **Наслідок 3.11.** *В категорії модулів над адитивною категорією* $\mathscr{A}$ *є множина твірних* P *така, що всі модулі з* P *проективні й компактні, а повна підкатегорія зі множиною об'єктів* P *еквівалентна* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$.

Наступна теорема, ідея якої належить Моріті, є оберненою до Наслідку 3.11.

morita **Теорема 3.12.** *Нехай* $\mathscr{C}$ *— абелева категорія, в якій існують довільні кодобутки. Категорія* $\mathscr{C}$ *є еквівалентною до категорії модулів над деякою адитивною категорії* $\mathscr{A}$ *тоді й лише тоді, коли в ній є множина твірних* P, *яка складається з проективних компактних об'єктів, причому повна підкатегорія* $\mathscr{P}$ *з множиною об'єктів* P *еквівалентна* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$.

Доведення. Необхідність цих умов — це Наслідок 3.11. Доведемо достатність. Отже, нехай ці умови виконано. Очевидно, можна вважати, що $\mathscr{A} = \mathscr{P}^{\mathrm{op}}$. Для кожного об'єкта $A \in \mathscr{C}$ розглянемо $\mathscr{P}^{\mathrm{op}}$-модуль $\mathscr{P}_A : \mathscr{P}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$, який є обмеженням на $\mathscr{P}$ представного модуля $\mathscr{C}_A$, тобто $\mathscr{P}_A(P) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A)$. Це визначає функтор $\mathsf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{P}^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$. Перевіримо, що він є строгим, повним і щільним. Зауважимо, що цей функтор зберігає добутки й кодобутки (останні — оскільки всі об'єкти $P \in \mathsf{P}$ є компактними), а оскільки всі P є проективними, цей функтор є точним. Позначимо через $\tilde{\mathsf{P}}$ множину всіх кодобутків об'єктів з P. Категорію $\mathscr{P}^{\mathrm{op}}\text{-Mod}$ позначимо через $\mathscr{M}$.

F є строгим:
Дійсно, нехай $\alpha : A \to B$ — ненульовий морфізм. Оскільки P — множина твірних, знайдеться морфізм $\beta : P \to A$ такий, що $\alpha\beta \neq 0$ і $P \in \mathsf{P}$. Тоді $\mathsf{F}(\alpha) = \mathscr{P}_A(\alpha) = \alpha\beta \neq 0$.[1]

F є щільним:
Нехай M — довільний $\mathscr{P}^{\mathrm{op}}$-модуль. Оскільки представні функтори $\mathscr{P}_P$, де $P \in \mathsf{F}$, утворюють множину твірних для категорії модулів, існує точна послідовність $\mathscr{P}_Q \xrightarrow{\varphi} \mathscr{P}_P \to M \to 0$, де P і Q належать $\tilde{\mathsf{P}}$: $P = \coprod_j P_j$ і $Q = \coprod_i Q_i$ (Наслідок 3.6). Тоді $\mathscr{P}_P = \coprod_j \mathscr{P}_{P_j}$, а $\mathscr{P}_Q = \coprod_i \mathscr{P}_{Q_i}$, звідки

eq31
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathscr{P}_Q, \mathscr{P}_P) &\simeq \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathscr{P}_Q, \mathscr{P}_{P_i}) \simeq \\ &\simeq \prod_i \prod_j \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\mathscr{P}_{Q_j}, \mathscr{P}_{P_i}) \simeq \prod_i \prod_j \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q_j, P_i) \simeq \\ &\simeq \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q, P_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q, P).\end{aligned} \tag{3.2}$$

[1] Зауважимо, що тут ми користувалися лише тим, що P — множина твірних.

Отже, $\varphi = \mathscr{P}_\alpha$ для деякого $\alpha : Q \to P$. Тоді $M = \operatorname{Coker}\varphi \simeq \mathscr{P}_C$, де $C = \operatorname{Coker}\alpha$, оскільки функтор F є точним.

F є повним:
З формул (3.2) видно, що відображення $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,P) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{M}}(FP,FQ)$ є бієктивним, якщо $P,Q \in \tilde{\mathsf{P}}$. Нехай $\alpha : \mathscr{P}_A \to \mathscr{P}_B$ — довільний морфізм модулів. Існують точні послідовності $Q \xrightarrow{d_1} P \xrightarrow{d_0} A \to 0$ і $Q' \xrightarrow{d_1'} P' \xrightarrow{d_0'} B \to 0$, в яких P,Q,P',Q' належать $\tilde{\mathsf{P}}$. Функтор F переводить їх у точні послідовності $FQ \xrightarrow{Fd_1} FP \xrightarrow{Fd_0} FA \to 0$ і $FQ' \xrightarrow{Fd_1'} FP' \xrightarrow{Fd_0'} FB \to 0$. Оскільки модулі FP і FQ проективні, морфізм α продовжується до комутативної діаграми

eq32 (3.3)
$$\begin{tikzcd} FQ \arrow[r, "Fd_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & FP \arrow[r, "Fd_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & FA \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ FQ' \arrow[r, "Fd_1'"] & FP' \arrow[r, "Fd_0'"] & FB \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Існують такі морфізми $\beta_0 : P \to P'$ і $\beta_1 : Q \to Q'$, що $\alpha_1 = F\beta_1$ і $\alpha_0 = F\beta_0$. Оскільки F строгий, одержимо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & P \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & A \arrow[r] & 0 \\ Q' \arrow[r, "d_1'"] & P' \arrow[r, "d_0'"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

В ній $d_0'\beta_0 d_1 = d_0' d_1' \beta_1$. Тому $d_0'\beta_0 = \beta d_0$ для деякого $\beta : A \to B$ (оскільки d_0 — коядро d_1). Тому, якщо в діаграмі (3.3) замінити α на $F\beta$, вона залишиться комутативною. Оскільки Fd_0 епік, а $\alpha(Fd_0) = (F\beta)(Fd_0)$, звідси $F\beta = \alpha$. □

morita-ring **Наслідок 3.13.** *Абелева категорія $\mathscr{C}$ еквівалентна категорії модулів над деяким кільцем $\boldsymbol{A}$ тоді й лише тоді, коли в категорії $\mathscr{C}$ існує компактний проективний твірний P такий, що $\boldsymbol{A} \simeq (\operatorname{End}_{\mathscr{C}} P)^{\mathrm{op}}$.*

Якщо, у свою чергу, $\mathscr{C} = \boldsymbol{B}\text{-Mod}$ — категорія модулів над кільцем $\boldsymbol{B}$, можна уточнити вигляд функтора $F : \boldsymbol{B}\text{-Mod} \to \boldsymbol{A}\text{-Mod}$, який встановлю еквівалентність $\boldsymbol{B}\text{-Mod} \simeq \boldsymbol{A}\text{-Mod}$ і його квазіоберненого $\mathsf{F}' : \boldsymbol{A}\text{-Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-Mod}$. Для цього встановимо такий факт.

tensor **Лема 3.14.** *Нехай $F : \boldsymbol{A}\text{-Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-Mod}$ — неперервний справа функтор,*[2] *$M = F\boldsymbol{A}$. Тоді $F \simeq M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$.*

Тут M розглядається, як $\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{A}$-бімодуль, на якому дія елемента $a \in \boldsymbol{A}$ визначається як застосування гомоморфізму $F(\cdot a)$, де $\cdot a : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ — множення праворуч на елемент a.

[2] Нагадаємо, що *неперервний справа* — це точний справа функтор, який зберігає кодобутки.

Доведення. Якщо N — довільний $\boldsymbol{A}$-модуль, $x \in N$, позначимо $\cdot x : \boldsymbol{A} \to N$ гомоморфізм $b \mapsto bx$. Нагадаємо, що відображення $x \mapsto \cdot x$ — це ізоморфізм $N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, N)$. Функтор F індукує відображення $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, N) \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, FN)$. Визначимо морфізм $\phi : M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_ \to F$, поклавши $\phi(N)(y \otimes x) = F(\cdot x)(y)$, де $x \in N$, $y \in M$. Відображення $\phi(\boldsymbol{A})$ є ізоморфізмом за побудовою. Оскільки обидва функтори $M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$ і F неперервні справа, $F(P)$ є ізоморфізмом для кожного вільного $\boldsymbol{A}$-модуля P. Якщо N — довільний $\boldsymbol{A}$-модуль, існує точна послідовність $Q \to P \to N \to 0$, де Q і P — вільні модулі. Вона індукує комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_{\boldsymbol{A}} Q \arrow[r] \arrow[d, "\phi(Q)"'] & M \otimes_{\boldsymbol{A}} P \arrow[r] \arrow[d, "\phi(P)"'] & M \otimes_{\boldsymbol{A}} N \arrow[r] \arrow[d, "\phi(M)"] & 0 \\
FQ \arrow[r] & FP \arrow[r] & FN \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

В ній перші два вертикальні відображення — ізоморфізми. Тому й $\phi(N)$ — ізоморфізм. $\square$

adjfun **Наслідок 3.15.** *Нехай (F, G) — спряжена пара функторів, де F : $\boldsymbol{A}$-Mod $\to$ $\boldsymbol{B}$-Mod, а G : $\boldsymbol{B}$-Mod $\to$ $\boldsymbol{A}$-Mod. Тоді $F \simeq M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$, а $G \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \_\,)$, де $M = F\boldsymbol{A}$.*

Доведення. Твердження про функтор F випливає з Леми 3.14, оскільки лівий спряжений функтор завжди є неперервним справа. Після цього твердження про G випливає з того, що спряженим до $M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$ є $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \_\,)$. $\square$

morita-rings **Наслідок 3.16.** (1) *Нехай F : $\boldsymbol{A}$-Mod $\to$ $\boldsymbol{B}$-Mod —еквівалентність категорій. Тоді*

(a) *$F \simeq M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$, де $M = FA$.*

(b) *M є скінченнопородженим проективним $\boldsymbol{B}$-модулем, а також скінченнопородженим проективним $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$-модулем.*

(c) *Канонічні відображення $\boldsymbol{B} \to \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M$ та $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}} \to \operatorname{End}_{\boldsymbol{B}} M$ є ізоморфізмами.*

(d) $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \boldsymbol{A}) \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \boldsymbol{B})$ *як $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулі.*
Надалі цей бімодуль позначатимемо $M^\vee$.

(e) *Функтор $M^\vee \otimes_{\boldsymbol{B}} \_$ є квазіоберненим до F.*

(2) *Навпаки, нехай M — такий $\boldsymbol{B}$-$\boldsymbol{A}$-бімодуль, що мають місце властивості* (b) *і* (c) *з пункту* (1). *Тоді функтор $F = M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$: $\boldsymbol{A}$-Mod $\to$ $\boldsymbol{B}$-Mod є еквівалентністю. Отже, мають місце й інші властивості з пункту* (1).

Доведення. (1) Нехай F' — квазіобернений до F. Тоді (F, F') і (F', F) — спряжені пари, тому $F \simeq M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$, а $F' \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \_\,)$, де $M = F\boldsymbol{A}$, і також $F' \simeq M' \otimes_{\boldsymbol{B}} \_$, а $F \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', \_)$, де $M' = F'\boldsymbol{B}$. Більш того, M — скінченнопороджений проективний $\boldsymbol{B}$-модуль, а M' — скінченнопороджений проективний $\boldsymbol{A}$-модуль, $\operatorname{End}_{\boldsymbol{B}} M \simeq \boldsymbol{A}$, а $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M' \simeq \boldsymbol{B}$. Звідси випливає, що канонічні морфізми функторів $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \boldsymbol{B}) \otimes_{\boldsymbol{B}} \_ \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \_) \simeq F'$ та $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', \boldsymbol{A}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \_ \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', \_) \simeq F$ — це ізоморфізми. Звідси, зокрема, $M' \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \boldsymbol{B})$, а $M \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', \boldsymbol{A})$. Тому M' є скінченнопородженим проективним правим $\boldsymbol{B}$-модулем, а M є скінченнопородженим проективним правим $\boldsymbol{A}$-модулем, причому $M \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M', \boldsymbol{B})$, а $M' \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \boldsymbol{A})$, і також $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M \simeq \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M' \simeq \boldsymbol{B}$, а $\operatorname{End}_{\boldsymbol{B}} M' \simeq \operatorname{End}_{\boldsymbol{B}} M \simeq \boldsymbol{A}$. Цим доведені всі необхідні твердження.

(2) Нехай властивості (b) і (c) виконані. Тоді модуль M є прямим доданком скінченнопородженого вільного правого $\boldsymbol{A}$-модуля: $\boldsymbol{A}^m = M \oplus N$. Застосувавши функтор $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\_, M)$, одержимо $M^m \simeq \boldsymbol{B} \oplus N'$, оскільки $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, M) \simeq \boldsymbol{B}$. Отже, M — твірний у категорії $\boldsymbol{B}$-модулів, а тоді функтор $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}}(M, \_)$ є еквівалентністю категорій $\boldsymbol{B}$-Mod та $\boldsymbol{A}$-Mod, а його квазіоберненим є функтор $M \otimes_{\boldsymbol{A}} \_$. □

wmorita **Теорема 3.17.** *Припустимо, що абелева категорія $\mathscr{C}$ має довільні кодобутки і множину проективних твірних. Тоді існує еквівалентність $F : \mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{R}$-fpr для деякого кільця $\boldsymbol{R}$.*

sec4 4. Ін'єктивні оболонки

Надалі ми розглядаємо деяку абелеву категорію $\mathscr{C}$. Якщо задано два морфізми $\alpha : A \to B$ і $\alpha' : A' \to B$, розглянемо ядро $\gamma : \tilde{A} \to A \oplus A'$ морфізму $\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2 : A \oplus A' \to B$ і позначимо $\tilde{\alpha} = \pi_2\gamma : \tilde{A} \to A'$ і $\tilde{\alpha}' = \pi_1\gamma : \tilde{A} \to A$. Тоді маємо комутативну діаграму

e41 (4.1)
$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} & A \\ {\scriptstyle\tilde{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B \end{array}$$

Цю діаграму звуть *відтягуванням* ("pull-back") пари морфізмів (α, α'). Морфізм $\tilde{\alpha}$ $(\tilde{\alpha}')$ звуть *відтягуванням α вздовж α'* (відповідно, відтягуванням α' вздовж α).

41 **Твердження 4.1.** *Якщо* (4.1) *— діаграма відтягування, то*

(1) $\alpha\tilde{\alpha}' = \alpha'\tilde{\alpha}$;

(2) *якщо $\alpha\xi' = \alpha'\xi$ для деяких морфізмів $\xi : X \to A'$ та $\xi' : X \to A$, то існує єлиний морфізм $\beta : X \to \tilde{A}$ такий, що $\xi = \tilde{\alpha}\beta$, а $\xi' = \tilde{\alpha}'\beta$.*

Доведення. (1) випливає з означення морфізмів γ, $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\alpha}'$.

(2) Якщо $\alpha\xi' = \alpha'\xi$, то $(\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2)(\iota_1\xi' + \iota_2\xi) = 0$, отже $\iota_1\xi' + \iota_2\xi = \gamma\beta$. Домноживши на π_1 та π_2, одержимо $\xi' = \pi_1\gamma\beta = \tilde{\alpha}'\beta$ і $\xi = \tilde{\alpha}\beta$. □

42 **Лема 4.2.** *У діаграмі відтягування* (4.1)

(1) *якщо α монік, то й $\tilde{\alpha}$ монік;*

(2) *якщо α епік, то й $\tilde{\alpha}$ епік.*

Доведення. (1) Якщо $\tilde{\alpha}\xi = 0$, то й $\alpha\tilde{\alpha}'\xi = \alpha'\tilde{\alpha}\xi = 0$, тому $\tilde{\alpha}'\xi = 0$, тобто $\pi_2\gamma\xi = \pi_1\gamma\xi = 0$. Оскільки $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1_{A\oplus A'}$, звідси $\gamma\xi = 0$ і $\xi = 0$.

(2) Якщо α епік, то й $\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2$ епік. Дійсно, якщо $\xi(\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2) = 0$, то, домноживши на ι_1, одержимо $\xi\alpha = 0$, звідки $\alpha = 0$. Тому $\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2$ — коядро γ. Якщо $\eta\tilde{\alpha} = \eta\pi_2\gamma = 0$, то $\eta\pi_2 = \eta'(\alpha\pi_1 - \alpha'\pi_2)$ для деякого η'. Домноживши на ι_1, одержимо $\eta'\alpha = 0$, звідки $\eta' = 0$ й $\eta = 0$. □

В дуальний спосіб визначається *діаграма виштовхування* (“push-out”) для пари морфізмів $\alpha : B \to A$ і $\alpha' : B \to A'$. Саме, позначимо через $\gamma : A \oplus A' \to \tilde{A}$ коядро морфізму $\iota_1\alpha - \iota_2\alpha'$, $\tilde{\alpha} = \gamma\iota_2$, $\tilde{\alpha}' = \gamma\iota_1$. *Виштовхуванням* пари (α, α') зветься діаграма

e42 (4.2)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & A \arrow[d, "\tilde{\alpha}'"] \\ A' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

Властивості виштовхування, дуальні до властивостей відтягування, випливають з останніх, застосованих до дуальної категорії. Втім, корисна вправа — довести їх безпосередньо.

43 **Твердження 4.3.** *Якщо* (4.2) *— діаграма виштовхування, то*

(1) $\tilde{\alpha}'\alpha = \tilde{\alpha}\alpha'$;
(2) *якщо $\xi'\alpha = \xi\alpha'$ для деяких морфізмів $\xi : A' \to X$ та $\xi' : A \to X$, то існує єлиний морфізм $\beta : \tilde{A} \to X$ такий, що $\xi = \beta\tilde{\alpha}$, а $\xi' = \beta\tilde{\alpha}'$.*

44 **Лема 4.4.** *У діаграмі виштовхування* (4.2)

(1) *якщо α монік, то й $\tilde{\alpha}$ монік;*
(2) *якщо α епік, то й $\tilde{\alpha}$ епік.*

essential **Означення 4.5.** Нехай $\alpha : A \to B$ — монік. Кажуть, що α — *істотний*, якщо для будь-якого ненульового моніка $\alpha' : A' \to B$ відтягування пари (α, α') є ненульовим.

Очевидно, кожен ізоморфізм є істотни зануренням. Такі істотні занурення назвемо *тривіальними.*

Якщо $\mathscr{C} = \mathscr{A}$-Mod — категорія модулів над деякою предадитивною категорією $\mathscr{A}$, M і M' — підмодулі в N, а $\alpha : M \to N$ і $\alpha' : M' \to N$ — їх занурення, легко бачити, що відтягування пари

(α, α') — це діаграма

$$\begin{tikzcd} M \cap M' \arrow[r, "\tilde{\alpha}'"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ M' \arrow[r, "\alpha'"'] & N \end{tikzcd}$$

в якій $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\alpha}'$ — теж занурення підмодулів. Отже, занурення $M \to N$ є *істотним* тоді й лише тоді, коли $M \cap M' \neq 0$ для довільного ненульового підмодуля $M' \subseteq N$.

injenv **Означення 4.6.** Істотне занурення $\alpha : A \to Q$, де Q — ін'єктивний об'єкт, зветься *ін'єктивною оболонкою* об'єкта A.

45 **Твердження 4.7.** *Якщо $\alpha : A \to Q$ і $\beta : A \to Q'$ — ін'єктивні оболонки об'єкта A, то існує ізоморфізм $\gamma : Q \to Q'$ такий, що $\beta = \gamma\alpha$.*

Доведення. Оскільки α монік, а Q' ін'єктивний, існує $\gamma : Q \to Q'$ такий, що $\beta = \gamma\alpha$. Нехай $\alpha' : A' \to Q$ — ядро γ. Це також монік. Якщо $\alpha' \neq 0$, відтягування пари (α, α') ненульове, що неможливо, бо тоді $\beta\tilde{\alpha}' = \gamma\alpha\tilde{\alpha}' = \gamma\alpha'\tilde{\alpha} = 0$, звідки $\tilde{\alpha}' = 0$, а $\tilde{\alpha}'$ є моніком за лемою 4.2. Отже, γ — монік, а тоді $Q' = \operatorname{Im}\gamma \oplus Q''$ для деякого підмодуля Q'', причому $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Im}\gamma$. Звідси $\operatorname{Im}\beta \cap Q'' = 0$ і $Q'' = 0$, тобто γ — ізоморфізм. $\square$

Будемо тепер розглядати категорію модулів $\mathscr{A}$-Mod над деякою предадитивною категорією $\mathscr{A}$.

46 **Лема 4.8.** *Модуль Q є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли він не має істотних занурень, крім тривіальних.*

Доведення. Якщо Q ін'єктивний і $Q \subseteq M$, то $M = Q \oplus Q'$ для деякого $Q' \subseteq M$. Тоді $Q \cap Q' = 0$, отже, якщо занурення істотне, $Q' = 0$ і $Q = M$, тобто це — тривіальне істотне занурення.

Припустимо тепер, що Q не має істотних занурень і $Q \subseteq M$. Тоді існують ненульові підмодулі $M' \subseteq M$, для яких $M \cap M' = 0$. Очевидно, об'єднання довільного ланцюга таких підмодулів знову має цю властивість. За лемою Цорна існує максимальний M' серед модулів, які перетинаються з M по нулю. Тоді обмеження на Q сюр'єкції $M \to M/M'$ — монік. Якщо це не епік, знайдеться ненульовий підмодуль $\bar{L} \subseteq M/M'$ який не перетинається з образом Q. Якщо L — прообраз $\bar{L}$ в M, то $L \cap Q = 0$, причому L строго більше за M', що неможливо. Тому $Q \to M/M'$ — ізоморфізм, а тоді $M = Q \oplus M'$. Отже Q ін'єктивний. $\square$

47 **Теорема 4.9.** *В категорії модулів $\mathscr{A}$-Mod кожен модуль має ін'єктивну оболонку.*

Доведення. Нехай $M \subseteq Q$, де Q — ін'єктивний модуль. Існують підмодулі $M' \supseteq M$, для яких занурення $M \hookrightarrow M'$ істотне (наприклад, само M). Знову з леми Цорна випливає, що серед таких підмодулів є максимальний N. Якщо $N \subseteq N'$ — істотне занурення, то існує морфізм $\alpha : N' \to Q$, тотожний на N. Тоді $\operatorname{Ker}\alpha \cap N = 0$, отже й $\operatorname{Ker}\alpha = 0$ і N' можна розглядати, як підмодуль в Q, причому занурення $M \hookrightarrow N'$ також істотне. З максимальності N випливає, що $N' = N$, тобто занурення $N \hookrightarrow N'$ тривіальне. Отже N не має нетривіальних істотних занурень, а тому він ін'єктивний за лемою 4.8. □

sec5

5. Теорема Мітчела про занурення

mitchel **Теорема 5.1** (Мітчел)**.** *Для будь-якої абелевої категорії $\mathscr{A}$ існує повне точне занурення $\mathscr{A} \to \boldsymbol{R}$-*Mod *для деякого кільця $\boldsymbol{R}$.*

Доведення. У категорії модулів $\mathscr{A}$-Mod розглянемо дві повні підкатегорії:

- $\mathscr{A}$-Mon — підкатегорію *мономодулів*, тобто таких модулв M, що для будь-якого моніка $\alpha : A \to A'$ відображення $M\alpha : MA \to MA'$ також є моніком. Інакше кажучи, якщо $0 \neq a \in MA$ і $\alpha : A \to A'$ — монік, то $\alpha a \neq 0$.
- $\mathscr{A}$-Lex — підкатегорію точних зліва модулів (функторів $\mathscr{A} \to \mathsf{Ab}$).

Зауважимо, що представні модулі $\mathscr{A}^A$ є точними зліва, тому $A \mapsto \mathscr{A}^A$ дає повне занурення $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$-Lex. Наша мета — довести, що категорія $(\mathscr{A}\text{-Lex})^{\mathrm{op}}$ є абелевою і задовольняє умовам теореми 3.17, а занурення $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$-Lex є точним. (Зауважимо, що занурення $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$-Mod не є точним). Після цього залишається лише застосувати теорему 3.17. Доведення ми розіб'ємо на кілька кроків, які подамо у вигляді лем.

step1 **Лема 5.2.** *Якщо M — мономодуль, а $M \hookrightarrow N$ — істотне занурення, то й N — мономодуль.*

Доведення. Припустимо, що $0 \neq a \in NA$, $\alpha : A \to A'$ — монік, але $\alpha a = 0$. Розглянемо підмодуль $M' \subseteq N$, породжений елементом: $M'B = \{\, \beta a \mid \beta : A \to B \,\}$. Він ненульовий, тому $M \cap M' \neq 0$, тобто існує морфізм $\beta : A \to B$ такий, що $0 \neq \beta a \in MB$. Розглянемо виштовхування

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A' \arrow[d, "be'"] \\ B \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \end{tikzcd}$$

В ньому α' — монік, але $\alpha'\beta a = \beta'\alpha a = 0$ у протиряччя з тим, що M є мономодулем. □

step2 **Лема 5.3.** *Якщо M — мономодуль, а Q — його ін'єктивна оболонка, то Q — точний.*

Доведення. Якщо $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точна послідовність у категорії $\mathscr{A}$, то послідовність модулів $0 \to \mathscr{A}^C \to \mathscr{A}^B \to \mathscr{A}^A$ також точна. Оскільки Q ін'єктивний, функтор $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\_\,, Q)$ точний. Нагадаємо, що $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\mathscr{A}^A, Q) \simeq QA$. Отже послідовність $QA \to QB \to QC \to 0$ є точною. За лемою 5.2, Q — монік, тобто відображення $QA \to QB$ — монік. Отже, точною є вся послідовність $0 \to QA \to QB \to QC \to 0$. □

step3 **Лема 5.4.** *Для кожного $\mathscr{A}$-модуля N існує епік $\mu_N : N \twoheadrightarrow N^{\mathrm{mon}}$, де N^{mon} є мономодулем, такий, що для кожного морфізму $\alpha : N \to M$, де M — мономодуль, існує єдиний морфізм α^{mon}, для якого $\alpha = \alpha^{\mathrm{mon}}\mu_N$. Якщо $\mu' : N \twoheadrightarrow M'$ — інший епік на мономодуль M' з цією ж властивістю, існує єдиний ізоморфізм $\eta : M^{\mathrm{mon}} \xrightarrow{\sim} M'$, для якого $\mu' = \eta\mu_N$.*

Доведення. Нехай $\{\, M_i \,\}$ — всі мономодулі, для яких існує епік $\nu_i : N \twoheadrightarrow M_i$, $\tilde{M} = \prod_i M_i$, $\nu : N \to \tilde{M}$ задається набором (nu_i) і $\mu_N : N \to N^{\mathrm{mon}}$ — образ ν. Якщо $\alpha : N \to M$, де M — монік, його образ N' збігається з одним з M_i, тому $\alpha = \pi_i\nu$ для цього i, а тоді $\alpha = \pi_i\iota\mu_N$, де ι — занурення $N^{\mathrm{mon}} \hookrightarrow \tilde{M}$. Отже можна покласти $\alpha' = \pi_i\nu$. Єдиність α' випливає з того, що μ_N — епік.

Твердження про інший епік μ' випливає з уже доведеної універсальності μ_N. Подробиці залишаємо читачеві як нескладну вправу. □

Оскільки $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mon}}(N^{\mathrm{mon}}, M)$, відповідність $N \mapsto N^{\mathrm{mon}}$ визначає лівий спряжений функтор до занурення $\mathscr{A}\text{-Mon} \to \mathscr{A}\text{-Mod}$.

Модуль N назвемо *стираючим*, якщо $\mu_N = 0$, тобто $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$ для довільного мономодуля M.

Вправа 5.5. Доведіть, що N — стираючий тоді й лише тоді, коли для кожного елемента $a \in NA$ існує монік $\alpha : A \to A'$ такий, що $\alpha a = 0$.

step4 **Лема 5.6.** *$K = \mathrm{Ker}\,\mu_N$ — стираючий модуль.*

Доведення. Нехай $\alpha : K \to M$, де M — мономодуль. Розглянемо ін'єктивну оболонку $\beta : M \to Q$. Морфізм $\beta\alpha : K \to Q$ продовжується до морфізму $\alpha' : N \to Q$. Оскільки Q — мономодуль, $\alpha' = \gamma\mu_N$ для деякого $\gamma : N^{\mathrm{mon}} \to Q$, а тоді $K \subseteq \mathrm{Ker}\,\alpha'$ і $\alpha = 0$. □

step5 **Лема 5.7.** *Нехай $0 \to M' \xrightarrow{\xi} M \xrightarrow{\eta} M'' \to 0$ — точна послідовність $\mathscr{A}$-модулів, в якій M є точним зліва. Модуль M' є точним зліва тоді й лише тоді, коли M'' — мономодуль.*

Доведення. Очевидно, M' — мономодуль. Нехай $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ — точна послідовність. Маємо комутативну діаграму з точними стовпчиками, точним середнім рядком і моніком $M'\alpha$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M'A \arrow[r, "M'\alpha"] \arrow[d, "\xi(A)"'] & M'B \arrow[r, "M'\beta"] \arrow[d, "\xi(B)"'] & M'C \arrow[d, "\xi(C)"'] \\
0 \arrow[r] & MA \arrow[r, "M\alpha"] \arrow[d, "\eta(A)"'] & MB \arrow[r, "M\beta"] \arrow[d, "\eta(B)"'] & MC \\
0 \arrow[r] & M''A \arrow[r, "M''\alpha"] \arrow[d] & M''B \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Припустимо, що M' точний зліва, і розглянемо елемент $a'' \in M''A$, для якого $\alpha a = 0$. Виберемо прообраз a цього елемента при морфізмі $\eta(A)$. Тоді $\eta(B)\alpha a = \alpha a' = 0$, тому $\alpha a = \xi(B)b$ для деякого $b \in M'B$. Оскільки $\xi(C)\beta b = \beta\xi(B)b = \beta\alpha a' = 0$, а перший рядок є точним, то $b = \alpha a'$ для деякого $a' \in M'A$. Тоді $\alpha\xi(A)a' = \xi(B)\alpha a' = \xi(B)b = \alpha a$. Оскільки $M\alpha$ монік, $a = \xi(A)a'$, а тоді $a'' = \eta(A)a = 0$. Отже M' є мономодулем.

Нехай тепер M'' — мономодуль. Оскільки $\beta\alpha = 0$, $\operatorname{Im} M'\alpha \subseteq \operatorname{Ker} M'\beta$. Розглянемо довільний елемент $b \in \operatorname{Ker} M'\beta$. Тоді $\beta\xi(B)b = \xi(C)\beta b = 0$, а тому $\xi(B)b = \alpha a$ для деякого $a \in MA$. Оскільки $\alpha\eta(A)a = \eta(B)\alpha(A)a = \eta(B)\xi(B)a = 0$, а $M''\alpha$ монік, $\eta(A)a = 0$, а тому $a = \xi(A)a'$ для деякого $a' \in M'A$. Тоді $\xi(B)\alpha a' = \alpha\xi(A)a' = \alpha a = \xi(B)b$. Оскільки $M\alpha$ — монік, $b = \alpha a' \in \operatorname{Im} M'(\alpha)$. Отже $\operatorname{Ker} M'(\beta)M'\alpha$, тобто M' точний зліва. □

step6 **Лема 5.8.** *Для будь-якого мономодуля M існує занурення $M \hookrightarrow R$, де R — мономодуль, а R/M стираючий.*

Доведення. Розглянемо точну послідовність $0 \to M \xrightarrow{\xi} Q \xrightarrow{\eta} N \to 0$, де Q — ін'єктивна оболонка M. Нехай $K = \operatorname{Ker} \mu_N$, а $R = \operatorname{Ker}(\mu_N \xi)$.

Очевидно, $M \subseteq R$. Маємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N^{\mathrm{mon}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & N^{\mathrm{mon}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Всі стовпчики, другий і третій рядки тут точні. Тому й перший рядок точний. Оскількм Q точний зліва, а N^{mon} — craft мономодуль, R точний зліва. $\square$

step7 **Лема 5.9.** *Якщо у точній послідовності* $0 \to M \xrightarrow{\rho} R \xrightarrow{\theta} K \to 0$ *модуль* R *точний злііва, а* K *стираючий, то будь-який морфізм* $\alpha : M \to L$, *де* L *точний зліва, однозначно продовжується до морфізму* $\alpha' : R \to L$ *(це означає, що* $\alpha = \alpha'\rho$*).*

Доведення. Нехай Q — ін'єктивна оболонка L. Розглянемо діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[r, "\theta"] & K \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\xi"] & Q \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

В ній N є мономодулем за лемою 5.6. Оскільки Q ін'єктивний, існує морфізм $\beta : R \to Q$, для якого $\beta\rho = \xi\alpha$. Він індукує морфізм $\bar{\beta} : K \to N$: $\bar{\beta}(k)$ визначається як $\eta\beta(k')$, де $k = \theta(k')$. Оскільки K стираючий, $\bar{\beta} = 0$, тобто $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\eta = L$. Якщо $\alpha' = \beta|_M$, це й дає $\alpha = \alpha'\rho$.

Нехай α'' — інший морфізм $R \to L$, для якого $\alpha = \alpha'\rho$, $\gamma = \alpha' - \alpha''$. Тоді $\gamma\rho = 0$, а тому $\gamma = \gamma'\theta$, бо θ — коядро ρ. Оскільки K стираючий, $\gamma' = 0$, отже $\alpha' = \alpha$. $\square$

Для кожного мономодуля M фіксуємо занурення $\rho_M : M \to RM$ таке, що RM точний зліва, а $\operatorname{Coker}\rho_M$ стираючий. Тоді $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mon}}(M, L) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Lex}}(RM, L$, тобто R — лівий спряжений функтор до занурення $\mathscr{A}$-Mon $\to \mathscr{A}$-Lex. Композиція R^0 цього функтора з функтором $N \mapsto N^{\mathrm{mon}}$ дає лівий спряжений до занурення $\mathscr{A}$-Mod $\to \mathscr{A}$-Lex.

Надалі літера L, можливо, з індексами, позначатиме модулі з $\mathscr{A}$-Lex.

step8 **Лема 5.10.** *Категорія* $\mathscr{A}$-Lex *абелева.*

Доведення. (i) *Кожен морфізм має ядро.*

Якщо $\alpha : L_1 \to L_2$, то його ядро теж належить $\mathscr{A}$-Lex за лемою 5.6. Тоді воно буде й ядром α в категорії $\mathscr{A}$-Lex.

Зокрема, α — монік в категорії $\mathscr{A}$-Lex тоді й лише тоді, коли він є моніком у категорії $\mathscr{A}$-Mod.

(ii) *Кожен морфізм має коядро.*

Нехай $\beta : L_2 \to N$ — коядро морфізму $\alpha : L_1 \to L_2$ в категорії $\mathscr{A}$-Mod, $\rho_N : N \to R^0N$. Якщо $\gamma\alpha = 0$ для деякого $\alpha : L_2 \to L$, існує єдиний морфізм $\gamma' : N \to L$, для якого $\alpha = \gamma'\beta$. За означенням R^0N, існує єдиний морфізм $\gamma'' : R^0N \to L$, для якого $\gamma' = \gamma''\rho_N$, тобто $\gamma = \gamma''\rho_N\beta$. Отже $\rho_N\beta$ — коядро α в категорії $\mathscr{A}$-Lex.

Оскільки морфізм $N^{\mathrm{mon}} \to R^0N$ — монік, звідси випливає, зокрема, що α є епіком в категорії $\mathscr{A}$-Lex тоді й лише тоді, коли $N^{\mathrm{mon}} = 0$.

(iii) *Кожен монік є ядром.*

Нехай $\alpha : L_1 \to L_2$ — монік, $\beta : L_2 \to M$ — його коядро в категорії $\mathscr{A}$-Mod. Тоді α — ядро β в категорії $\mathscr{A}$-Mod. За лемою 5.6, M — мономодуль, тому $\rho_M : M \to R^0M$ — монік. Аде тоді α є ядром $\rho_M\beta$ в категорії $\mathscr{A}$-Mod, а тому й у категорії $\mathscr{A}$-Lex.

(iv) *Кожен епік є коядром.*

Нехай $\alpha : L_1 \to L_2$ епік у категорії $\mathscr{A}$-Lex, $M = \operatorname{Im}\alpha \subseteq L_2$, $\alpha' : L_1 \to M$ — епік з канонічного розкладу $\alpha''\alpha'$ морфізму α в категорії $\mathscr{A}$-Mod. Нехай $\beta : L \to L_1$ — ядро α' в категорії $\mathscr{A}$-Mod. Тоді α' — коядро β. Оскільки M монік (як підмодуль в L_2), L точний зліва. Якщо $\gamma\beta = 0$ для деякого $\gamma : L_1 \to L'$, де L' точний зліва, то $\gamma = \gamma'\alpha'$ для деякого $\gamma' : M \to L'$. Оскільки $L_2/M = \operatorname{Coker}\alpha$ — стираючий, $\gamma' = \gamma''\alpha''$ для деякого $\gamma'' : L_2 \to L'$. Отже $\gamma = \gamma''\alpha''\alpha = \gamma''\alpha$, тобто α є коядром β в категорії $\mathscr{A}$-Lex. □

step9 **Лема 5.11.** (1) *Якщо точний зліва модуль Q є ін'єктивним $\mathscr{A}$-модулем, він є також ін'єктивним об'єктом категорії* $\mathscr{A}$-Lex.

(2) *Кожен точний зліва модуль L має ін'єктивну оболонку в категорії* $\mathscr{A}$-Mod, *яка збігається з його ін'єктивною оболонкою в* $\mathscr{A}$-Mod.

(3) *Ін'єктивні об'єкти категорії* $\mathscr{A}$-Lex *утворюють множину котвірних цієї категорії.*

Доведення. (1) Нехай $\alpha : L' \to L$ — монік в категорії $\mathscr{A}$-Mod, він є також моніком у категорії $\mathscr{A}$-Mod. Тому $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Lex}}(L, Q) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Lex}}(L', Q)$ — епік і Q — ін'єктивний об'єкт у $\mathscr{A}$-Lex.

(2) Якщо Q — ін'єктивна оболонка L у категорії $\mathscr{A}$-Mod, то Q — ін'єктивний об'єкт у категорії $\mathscr{A}$-Mod. Оскільки моніки в категорії $\mathscr{A}$-Lex ті самі, що й у категорії $\mathscr{A}$-Mod, занурення $L \hookrightarrow Q$ залишається істотним і в категорії $\mathscr{A}$-Lex.

(3) Нехай $\alpha : L_1 \to L_2$ — ненульовий морфізм, L — його образ у категорії $\mathscr{A}$-Lex і Q — ін'єктивна оболонка L. Занурення $L \hookrightarrow Q$ можна продовжити до морфізму $\beta : L_2 \to Q$, причому $\beta\alpha \neq 0$. □

Отже, категорія $\mathscr{A}$-Lex абелева, має множину ін'єктивних котіврних і має довільні добутки (очевидно, що добуток точних зліва функторів є точним зліва). Тому дуальна категорія $(\mathscr{A}\text{-Lex})^{\mathrm{op}}$ задовольняє умовам теореми 3.17. Залишається останній крок.

step10 **Лема 5.12.** *Занурення Йонеди* $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$-Lex *є точним.*

Доведення. Нехай $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точна послідовність в категорії $\mathscr{A}$. Відомо, що послідовність $0 \to \mathscr{A}^C \xrightarrow{\cdot\beta} \mathscr{A}^B \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathscr{A}^A$ — точна в $\mathscr{A}$-Mod, а тому й у $\mathscr{A}$-Lex (оскільки ядра в цих категоріях збігаються). Залишається довести, що $\cdot\alpha$ є епіком у категорії $\mathscr{A}$-Lex. Нехай це не так і $\xi : \mathscr{A}^A \to L$ — коядро $\cdot\alpha$. Існує морфізм $\eta : L \to Q$, де Q ін'єктивний об'єкт в $\mathscr{A}$-Lex, для якого $\eta\xi \neq 0$. З іншого боку, $\eta\xi(\cdot\alpha) = 0$. Отже, морфізм $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\mathscr{A}^B, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\mathscr{A}^A, Q)$, індукований морфізмом $\cdot\alpha$, не є моніком. Згадаємо, що $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\text{-Mod}}(\mathscr{A}, Q) \simeq QA$, а відображення, індуковане $\cdot\alpha$ при такому ототожненні переходить у $Q\alpha$. Але $Q\alpha$ — монік, що дає протиріччя. □

Комбінуючи останній результат з теоремою 3.17, застосованою до категорії $(\mathscr{A}\text{-Lex})^{\mathrm{op}}$, ми отримаємо точне повне занурення $\mathscr{A} \to \boldsymbol{R}$-Mod (навіть $\mathscr{A} \to \boldsymbol{R}$-fpr) для деякого кільця $\boldsymbol{R}$. □