Вступ до теорії категорій і теорії зображень

Ю.А. Дрозд

Зміст

Розділ 1. Категорії і функтори 1
1.1. Категорії 1
1.2. $\Bbbk$-категорії й прямі суми 3
1.3. Функтори 7
1.4. Еквівалентності категорій 11
1.5. Спряжені функтори 13
1.6. Тензорний добуток 16
1.7. Точні послідовності і функтори 18
1.8. Проективні та ін'єктивні модулі 21
1.9. Мінори і теорема Моріти 23
1.10. Локальні категорії й теорема Крулля–Шмідта–Адзумая 26
1.11. Модулі скінченної довжини 29

Розділ 2. Зображення сагайдаків 32
2.1. Сагайдаки та їх зображення 32
2.2. Віддзеркалення 35
2.3. Функтори віддзеркалень 37
2.4. Сагайдак Кронекера 41
2.5. Ручні сагайдаки 45

Домашні завдання 47

Бібліоґрафія 55

Розділ 1

Категорії і функтори

ch1

1.1. Категорії

s11

111 Означення 1.1.1. *Категорією* зветься шістка

$$\mathscr{C} = (\operatorname{Ob}\mathscr{C}, \operatorname{Mor}\mathscr{C}, \mathrm{id}, \iota_0, \iota_1, \mu),$$

яка складається з двох множин: множини *об'єктів* $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$ та множини *морфізмів* $\operatorname{Mor}\mathscr{C}$, та чотирьох відображень: $\mathrm{id} : \operatorname{Ob}\mathscr{C} \to \operatorname{Mor}\mathscr{C}$, $\iota_k : \operatorname{Mor}\mathscr{C} \to \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ $(k = 0, 1)$ та $\mu : \operatorname{Mor}^{(2)}\mathscr{C} \to \operatorname{Mor}\mathscr{C}$, де

$$\operatorname{Mor}^{(2)}\mathscr{C} = \{\, (\beta, \alpha) \in (\operatorname{Mor}\mathscr{C}) \times (\operatorname{Mor}\mathscr{C}) \mid \iota_1(\alpha) = \iota_0(\beta) \,\}.$$

Морфізм $\mathrm{id}(A)$ зветься *тотожним*, або *одиничним* морфізмом об'єкта A. Ми позначатимемо його 1_A. Об'єкти $\iota_0(\alpha)$ та $\iota_1(\alpha)$ звуться, відповідно, *початком* та *кінцем* морфізму α. Якщо $\iota_0(\alpha) = A$, а $\iota_1(\alpha) = B$, пишуть $\alpha : A \to B$ або $A \xrightarrow{\alpha} B$ і кажуть, що α — *морфізм з A до B*. Множину всіх морфізмів з A до B позначають $\mathscr{C}(A, B)$ або $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Ми найчастіше користуємося першим позначенням. Якщо $(\beta, \alpha) \in \operatorname{Mor}^{(2)}\mathscr{C}$, то морфізм $\mu(\beta, \alpha)$ позначають $\beta\alpha$, або $\beta \cdot \alpha$, або $\beta \circ \alpha$ і звуть *добутком* або *композицією* морфізмів β й α. $a \circ b$

Відображення, які входять у визначення категорії мають задовольняти наступним умовам:

(1) $1_A : A \to A$.
(2) Якщо $\alpha : A \to B$, то $\alpha 1_A = 1_B \alpha = \alpha$.
(3) Якщо $\alpha : A \to B,\ \beta : B \to C,\ \gamma : C \to D$, то $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$.

Розглянемо приклади категорій. У більшості з них виконання умов (1–3) цілком очевидне.

112 Приклад 1.1.2. (1) *Категорія множин* Set. Її об'єкти — це множини, морфізми з A до B — відображення множини A в множину B, 1_A — тотожне відображення множини в себе, добуток — це звичайний добуток відображень.

(2) *Категорія груп* Gr. Її об'єкти — це групи, морфізми з A до B — гомоморфізми з групи A у групу B, 1_A — тотожний гомоморфізм групи A, добуток — це звичайний добуток гомоморфізмів.

(3) Аналогічно визначаються категорії абелевих груп Ab, кілець Ring, топологічних просторів Top (в останньому прикладі морфізми — це неперервні відображення топологічних просторів), тощо.

112-3 (4) Нехай $\mathfrak{S}$ — *квазівпорядкована множина*, тобто множина, на якій задано рефлексивне й транзитивне відношення $a \prec b$ (*квазіпорядок*). Її можна ототожнити з категорією $\mathscr{S}$, в якій $\operatorname{Ob}\mathscr{S} = \mathfrak{S}$, множина морфізмів з a до b складається з одного елемента σ_{ba}, якщо $a \prec b$, і порожня, якщо $a \not\prec b$; $1_a = \sigma_{aa}$, а $\sigma_{cb}\sigma_{ba} = \sigma_{ca}$.

Останній приклад показує, що категорія не обов'язково складається з множин та їх відображень.

Ось ще один важливий приклад, пов'язаний з поняттям *сагайдака* або *орієнтованого графа* (*орграфа*).

113 Означення 1.1.3. (1) *Сагайдаком* (*орграфом*) зветься четвірка

$$\Gamma = (\operatorname{Ver}\Gamma, \operatorname{Arr}\Gamma, \iota_0, \iota_1),$$

, яка складається з двох множин: множини *вершин* $\operatorname{Ver}\Gamma$ та множини *стрілок* $\operatorname{Arr}\Gamma$, та двох відображень $\iota_k : \operatorname{Arr}\Gamma \to \operatorname{Ver}\Gamma$ ($k = 0, 1$). (Ніяких умов на ці множини й відображення не накладається).

Якщо $\iota_0(\alpha) = A$, а $\iota_1(\alpha) = B$, пишуть $\alpha : A \to B$ або $A \xrightarrow{\alpha} B$ і кажуть, що α — *стрілка з A до B*. Вершини $\iota_0(\alpha)$ та $\iota_1(\alpha)$ звуться, відповідно, *початком* та *кінцем* стрілки α.

(2) *Шлях* у сагайдаку Γ — це послідовність стрілок $p = \alpha_l \dots \alpha_2\alpha_1$, в якій $\iota_1(\alpha_i) = \iota_0(\alpha_{i+1})$ для всіх $1 \leqslant i < l$, або символ $\mathbf{0}_A$ для кожної вершини A, який зветься *порожнім шляхом у вершині* A. Число l зветься *довжиною* шляху p; довжина порожнього шляху визначається як 0. Ми позначаємо $\iota_0(p) = \iota_0(\alpha_1)$, $\iota_1(p) = \iota_1(\alpha_m)$; $\iota_0(\mathbf{0}_A) = \iota_1(\mathbf{0}_A) = A$.

(3) *Вільна категорія* $\operatorname{Cat}\Gamma$, породжена сагайдаком Γ визначається в такий спосіб:
   (a) Її об'єкти — це вершини сагайдака Γ.
   (b) Її морфізми — це шляхи в сагайдаку Γ.
   (c) $\operatorname{id}(A) = \mathbf{0}_A$.
   (d) ι_0 та ι_1 визначені вище.
   (e) Якщо $p = \alpha_l \dots \alpha_2\alpha_1$, $p' = \alpha'_m \dots \alpha'_2\alpha'_1$, причому $\iota_0(p') = \iota_1(p)$, то $p'p = \alpha'_m \dots \alpha'_2\alpha'_1\alpha_l \dots \alpha_2\alpha_1$; якщо $\iota_0(p) = A$, $\iota_1(p) = B$, то $\mathbf{0}_B p = p\mathbf{0}_A = p$.

Тут також виконання всіх умов очевидне.

Якщо $\operatorname{Ver}\Gamma$ складається з одного елемента, то $\operatorname{Cat}\Gamma$ — це вільна напівгрупа з вільною множиною твірних $\operatorname{Arr}\Gamma$.

114 Означення 1.1.4. (1) Морфізм $\alpha : A \to B$ зветься *мономорфізмом*, або *моніком*, якщо на нього можна скорочувати зліва. тобто з рівності $\alpha\beta = \alpha\beta'$ випліває, що $\beta = \beta'$.

(2) Морфізм $\alpha : A \to B$ зветься *епіморфізмом*, або *епіком*, якщо на нього можна скорочувати справа. тобто з рівності $\gamma\alpha = \gamma'\alpha$ випліває, що $\gamma = \gamma'$.

(3) Морфізм $\alpha : A \to B$ зветься *ізоморфізмом*, якщо існує *обернений* до нього морфізм, тобто такий морфізм $\alpha^{-1} : B \to A$, що $\alpha\alpha_{-1} = 1_B$ і $\alpha^{-1}\alpha = 1_A$. Якщо ізоморфізм $\alpha : A \to B$ існує, кажуть, що об'єкти A і B *ізоморфні* і пишуть $A \simeq B$.

Очевідно, що добуток моніков (епіков, ізоморфізмів) є також моніком (епіком, ізоморфізмом). Ізоморфізм є одеочасно і моніком, і епіком, а відношення ізоморфіму є аідношенням еквівалентності на множині об'єктів.

115 Вправа 1.1.5. (1) Доведіть, що в категорії множин відображення $\alpha : A \to B$ є моніком тоді й лише тоді, коли воно ін'єктивне, тобто переводить різні елементи в різні, і є епіком тоді й лише тоді, коли воно сюр'єктивне, тобто $\operatorname{Im}\alpha = B$.

(2) Доведіть, що в категорії груп або кілець гомоморфізм $\alpha : A \to B$ є моніком тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Ker}\alpha = 0$. Можна довести, що в категорії груп гомоморфізм є епіком тоді й лише тоді, коли він сюр'єктивний, але це зовсім нетривіально (вперше це зробив Шрайєр за допомогою конструкції вільного добутку з об'єднаною підгрупою). Навпаки, у категорії кілець занурення $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ є епіком (доведіть це), але не є сюр'єктивним.

116 Означення 1.1.6. *Підкатегорією* категорії $\mathscr{C} = (\operatorname{Ob}\mathscr{C}, \operatorname{Mor}\mathscr{C}, \mathrm{id}, \iota_0, \iota_1, \mu)$ зветься пара $\mathscr{C}'$ підмножин $\operatorname{Ob}\mathscr{C}' \subseteq \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, $\operatorname{Mor}\mathscr{C}' \subseteq \operatorname{Mor}\mathscr{C}$ така, що

(1) *Якщо $\alpha \in \operatorname{Mor}\mathscr{C}'$, то $\iota_0(\alpha) \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}'$ і $\iota_1(\alpha) \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}'$.*
Позначимо $\mathscr{C}'(A, B) = \mathscr{C}(A, B) \cap \operatorname{Mor}\mathscr{C}'$.
(2) *Якщо $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}'$, то $1_A \in \operatorname{Mor}\mathscr{C}'$.*
(3) *Якщо $\alpha \in \mathscr{C}'(A, B)$, $\beta \in \mathscr{C}'(B, C)$, то $\beta\alpha \in \mathscr{C}'(A, C)$.*

Очевидно, тоді $\mathscr{C}'$ разом з обмеженнями на $\operatorname{Ob}\mathscr{C}'$ і $\operatorname{Mor}\mathscr{C}'$ відображень $\mathrm{id}, \iota_0, \iota_1, \mu$ теж є категорією.

Кажуть, що підкатегорія $\mathscr{C}'$ є *повною*, якщо $\mathscr{C}'(A, B) = \mathscr{C}(A, B)$ для довільних $A, B \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}'$.

1.2. $\Bbbk$-категорії й прямі суми

s12

Ми матимемо справу, в основному, з категоріями, в яких, крім множення, є й додавання морфізмів і навіть їх множення на елементи фіксованого комутативного кільця.

121 Означення 1.2.1. Нехай $\Bbbk$ — комутативне кільце. $\Bbbk$-*категорія* — це категорія $\mathscr{C}$, в якій кожна множина $\mathscr{C}(A, B)$ є $\Bbbk$-модулем, а множення морфізмів є $\Bbbk$-білінійним, тобто

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \alpha')\beta &= \alpha\beta + \alpha\epsilon\beta, \\
\gamma(\alpha + \alpha') &= \gamma\alpha + \gamma\alpha', \\
(a\alpha)\beta &= \alpha(a\beta) = a(\alpha\beta),
\end{aligned}
$$

($\alpha, \alpha', \beta, \gamma \in \operatorname{Mor}\mathscr{C},\ a \in \Bbbk$) завжди, коли вказані дії визначені (легко бачити, що праві й ліві частини цих рівностей визначені одночасно).

Якщо $\Bbbk = \mathbb{Z}$, кажуть також, що $\mathscr{C}$ є *предадитивною категорією.* Зауважимо, що в цьому випадку умова, пов'язана з множенням на цілі числа, є зайвою (вона виконується автоматично, якщо виконані умови на додавання). Звичайно, кожна $\Bbbk$-категорія є, зокрема, предадитивною.

122 Приклад 1.2.2. (1) Основним прикладом $\Bbbk$-категорій є категорія $\Bbbk$-модулів $\Bbbk$-Mod і, більш загально, категорія $\boldsymbol{A}$-Mod модулів над деякою $\Bbbk$-алгеброю $\boldsymbol{A}$.

(2) Довільну категорію $\mathscr{C}$ можна занурити у $\Bbbk$-лінійну категорію $\Bbbk\mathscr{C}$ з тією ж множиною об'єктів, якщо визначити $\Bbbk\mathscr{C}(A, B)$ як вільний $\Bbbk$-модуль з базою $\mathscr{C}(A, B)$. Множення морфізмів з $\Bbbk\mathscr{C}$ визначається по білінійності, виходячи з множення морфізмів з $\mathscr{C}$.

(3) Зокрема, якщо Γ — деякий сагайдак, визначена *вільна* $\Bbbk$*-категорія* $\Bbbk\Gamma$, породжена сагайдаком Γ, як категорія $\Bbbk\operatorname{Cat}\Gamma$.

Визначимо *категорію матриць* $\mathsf{Mat}(\Bbbk)$ над кільцем $\Bbbk$. Її об'єкти — натуральні числа, включаючи 0. Множина морфізмів $n \to m$ — це множина матриць $\operatorname{Mat}(m \times n, \Bbbk)$. Якщо $m = 0$ або $n = 0$, ми вважаємо, що ця множина складається з одного нульового елемента. Тотожний морфізм $n \to n$ — це одинична матриця I_n. Множення морфізмів визначається як звичайне множення матриць.

122a Означення 1.2.3. Об'єкт O предадитивної категорії зветься *нульовим*, якщо у групі $\mathscr{C}(O, O)$ $1_O = 0$.

Легко перевірити, що це рівносильно тому, що всі групи $\mathscr{C}(A, O)$ та $\mathscr{C}(O, A)$ — нульові, а також, що всі нульові об'єкти (якщо вони є) ізоморфні. Ми будемо ототожнювати всі нульові об'єкти і позначати нульовий об'єкт категорії $\mathscr{C}$ через $\mathbf{0}_{\mathscr{C}}$ або, якщо категорія фіксована, через $\mathbf{0}$.

Важливим випадком категорій є такі предадитивні категорії, в яких можна додавати не лише морфізми, а й об'єкти у наступному розумінні..

123 Означення 1.2.4. Діаграма морфізмів у предадитивній категорії $\mathscr{C}$

e121 (1.2.1)
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, bend left, "i_1"] & A \arrow[l, bend left, "p_1"] \arrow[r, bend right, "p_2"'] & A_2 \arrow[l, bend right, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

зветься *діаграмою прямої суми*, якщо виконані рівності:

$$\begin{aligned} &p_k i_k = 1_{A_k}\ (k = 1, 2), \\ &p_k i_l = 0,\ \text{якщо } k \neq l, \\ &i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_A. \end{aligned}$$

З першої з цих рівностей одразу випливає, що i_k — це моніки, а p_k — епіки.

124 Приклад 1.2.5. Якщо $\Bbbk$-модуль A є прямою сумою своїх підмодулів $A = A_1 \oplus A_2$, тобто кожен елемент $a \in A$ однозначно подається як сума $a = a_1 + a_2$ ($a_k \in A_k$), то визначена діаграма прямої суми (1.2.1), в якій i_k — занурення $A_k \to A$, а $p_k(a) = a_k$ з вищезгаданого розкладу $a = a_1 + a_2$ ($a_k \in A_k$).

125 Твердження 1.2.6. *Наступні умови рівносильні:*

(1) *Існує діаграма прямої суми* (1.2.1)*.*

(2) *Для довільного об'єкту $B \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ існує ізоморфізм $\mathscr{C}(A,B) \xrightarrow{\varphi_B} \mathscr{C}(A_1,B) \oplus \mathscr{C}(A_2,B)$ такий, що $\varphi_C(\beta\alpha) = \beta\varphi_B(\alpha)$ для кожного морфізму $\alpha : A \to B$ і для кожного морфізму $\beta : B \to C$, де $\beta(\alpha_1,\alpha_2) = (\beta\alpha_1,\beta\alpha_2)$.*

(3) *Для довільного об'єкту $B \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ існує ізоморфізм $\mathscr{C}(B,A) \xrightarrow{\psi_B} \mathscr{C}(B,A_1) \oplus \mathscr{C}(B,A_2)$ такий, що $\psi_C(\alpha\gamma) = \psi_B(\alpha)\gamma$ для кожного морфізму $\alpha : B \to A$ і для кожного морфізму $\gamma : C \to B$, де $(\alpha_1,\alpha_2)\gamma = (\alpha_1\gamma,\alpha_2\gamma)$.*

Доведення. Ми доведемо рівносильність (1) $\Leftrightarrow$ (2), залишивши рівносильність (1) $\Leftrightarrow$ (3) читачеві.

(1) $\Rightarrow$ (2) Визначимо $\varphi_B(\alpha) = (\alpha i_1, \alpha i_2)$. Це біекція: обернене відображення переводить пару (α_1,α_2) у $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ (перевірте це). Умова на добутки з β виконується очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Нехай $\varphi_A(1_A) = (i_1,i_2)$, $p_1 : A \to A_1$ — такий морфізм, що $\varphi_{A_1}(p_1) = (1_{A_1},0)$, а $p_2 : A \to A_2$ — такий морфізм, що $\varphi_{A_2}(p_2) = (0,1_{A_2})$. Тоді

$$(1_{A_1},0) = \varphi_{A_1}(p_1) = \varphi_{A_1}(p_1 1_A) = p_1\varphi_A(1_A) = (p_1 i_1, p_2 i_2),$$

звідки $p_1 i_1 = 1_{A_1}$, $p_1 i_2 = 0$. Так само $p_2 i_2 = 1_{A_2}$, $p_2 i_1 = 0$. Нарешті,

$$\varphi_A(i_1p_1+i_2p_2) = \varphi_A((i_1p_1+i_2p_2)1_A) = (i_1p_1+i_2p_2)(i_1,i_2) = (i_1,i_2) = \varphi_A(1_A),$$

звідки $i_1p_1 + i_2p_2 = 1_A$. $\square$

Очевидно, якщо дано діаграму прямої суми (1.2.1) і $\xi : A \to A'$ — ізоморфізм, то

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, bend left, "\xi i_1"] & A' \arrow[l, bend left, "p_1\xi^{-1}"] \arrow[r, bend left, "p_2\xi^{-1}"] & A_2 \arrow[l, bend left, "\xi i_2"] \end{tikzcd}$$

також є діаграмою прямої суми. Вірно й обернене.

126 Твердження 1.2.7. *Якщо задано дві діаграми прямої суми,* (1.2.1) *та*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, bend left, "i'_1"] & A' \arrow[l, bend left, "p'_1"] \arrow[r, bend left, "p'_2"] & A_2 \arrow[l, bend left, "i'_2"] \end{tikzcd},$$

то існує единий ізоморфізм $\xi : A \to A'$ такий. що $i'_k = \xi i_k$ і $p'_k = p_k\xi^{-1}$.

Доведення. Покладемо $\xi = i'_1 p_1 + i'_2 p_2$ і $\xi' = i_1 p'_1 + i_2 p'_2$. Легко бачити, що тоді $\xi\xi' = 1_{A'}$, а $\xi'\xi = 1_A$, тобто ξ' — обеpенений до ξ.Так само, $\xi i_k = i'_k$ і $p_k \xi' = p'_k$. З іншого боку, з рівностей $\xi i_k = i'_k$ і $p'_k = p_k \xi^{-1}$ $(k = 1, 2)$, тобто $p_k = p'_k \xi$ одразу випливає, що $\xi = i'_1 p_1 + i'_2 p_2$. $\square$

Отже, у діаграмі прямої суми (1.2.1) об'єкт A визначається об'єктами A_1 і A_2 з точністю до ізоморфізму. Тому, якщо така діаграма існує, кажуть, що A є *прямою сумою* об'єктів A_1 і A_2 і пишуть $A = A_1 \oplus A_2$. Кажуть також, що *існує пряма сума об'єктів* A_1 і A_2.

127 Означення 1.2.8. Предадитивна категорія $\mathscr{C}$ зветься *адитивною*, якщо в ній є нульовий об'єкт і для довільних об'єктів $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ існує пряма сума.

Наприклад, категорія $\boldsymbol{A}$-Mod є адитивною, в той час, як вільна $\Bbbk$-категорія $\Bbbk\Gamma$ такою не є (чому?).

Аналогічно до прямої суми двох об'єктів визначається пряма сума кількох об'єктів. Саме, *діаграма прямої суми* визначається як набір морфізмів

e122 (1.2.2)
$$A_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} A \qquad (k = 1, 2, \dots, m)\ ,$$

такий, що

$$\begin{aligned} &p_k i_k = 1_{A_k}, \\ &p_k i_l = 0, \text{ якщо } k \neq l, \\ &\sum_{k=1}^{m} i_k p_k = 1_A. \end{aligned}$$

Якщо така діаграма існує, кажуть, що об'єкт A є *прямою сумою* об'єктів $A_1, A_2, \dots, A_m$ і пишуть $A \simeq \bigoplus_{k=1}^m A_k$. Як і для двох об'єктів, така пряма сума визначено з точністю до однозначно визначеного ізоморфізму.

128 Вправа 1.2.9. Доведіть, що коли $A \simeq \bigoplus_{k=1}^m A_k$, $B \simeq \bigoplus_{k=m+1}^n A_k$ і $C \simeq A \oplus B$, то $C \simeq \bigoplus_{k=1}^n A_k$.

Зокрема, у адитивній категорії існують прямі суми довільного скінченнного набору об'єктів.

Для подальшого буде корисно записувати морфізми між прямими сумами черех матпиці, як це робиться для лінійних відображень між векторними просторами.

129 Означення 1.2.10. Нехай дано дві діаграми прямиї суми, (1.2.2) та

e123 (1.2.3)
$$B_l \underset{p'_l}{\overset{i'_l}{\rightleftarrows}} B \qquad (l = 1, 2, \dots, n)\ .$$

Для кожного морфізму $\alpha : A \to B$ позначимо $\alpha_{lk} = p'_l \alpha i_k$ (це морфізм $A_k \to B_l$) і визначимо *матрицю морфізму* α *відносно розкладів* (1.2.2) та (1.2.3) як $n \times m$ матрицю $[\alpha] = (\alpha_{lk})$.

120 Вправа 1.2.11. Перевірте, що

(1) Для довільного набору морфізмів $\alpha_{lk} : A_k \to B_l$ морфізм $\alpha = \sum_{k,l} i'_l \alpha_{lk} p_k$ є єдиним таким, що $[\alpha] = (\alpha_{lk})$. Отже відповідність $\alpha \mapsto (\alpha_{lk})$ є бієкцією.

(2) Якщо

e124 (1.2.4)
$$\begin{tikzcd} C_r \arrow[r, bend left, "i''_r"] & C \arrow[l, bend left, "p''_r"] \end{tikzcd} \qquad (r = 1, 2, \dots, s)$$

— ще одна діаграма прямої суми, а $\beta : B \to C$, то $[\beta\alpha] = [\beta][\alpha]$, де $[\beta]$ рахується відносно розкладів (1.2.3) та (1.2.4), а $[\beta\alpha]$ — відносно розкладів (1.2.2) та (1.2.4).

12A Означення 1.2.12. (1) Підкатегорія $\mathscr{A}'$ $\Bbbk$-лінійної категорії $\mathscr{A}$ зветься $\Bbbk$-*підкатегорією*, якщо $\mathscr{A}'(A, B)$ є $\Bbbk$-підмодулем в $\mathscr{A}(A, B)$ для довільних об'єктів $A, B \in \mathscr{A}'$. Зокрема, кожна повна підкатегорія $\Bbbk$-лінійної категорії є її $\Bbbk$-підкатегорією.

(2) Підкатегорія $\mathscr{A}'$ адитивної категорії $\mathscr{A}$ зветься *адитивною підкатегорією*, якщо вона є адитивною категорією.
Очевидно, якщо $A, B, C \in \mathscr{A}'$ і $C \simeq A \oplus B$ в категорії $\mathscr{A}'$, то також $C \simeq A \oplus B$ в категорії $\mathscr{A}$. Обернене має місце, якщо $\mathscr{A}'$ — повна підкатегорія.

s13
1.3. Функтори

131 Означення 1.3.1. Нехай $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ — дві категорії. *Функтором* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ з категорії $\mathscr{A}$ до категорії $\mathscr{B}$ зветься пара відображень $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\,\mathscr{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ та $F_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}\,\mathscr{A} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$, які задовольняють таким умовам (ми пишемо FA і $F\alpha$ замість $F_{\mathrm{Ob}}A$ і $F_{\mathrm{Mor}}\alpha$):

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \alpha : A \to B, \text{ то } F\alpha : FA \to FB; \\ &F1_A = 1_{FA}; \\ &F(\alpha\beta) = F\alpha \cdot F\beta. \end{aligned}$$

Якщо $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — ще один функтор, визначена композиція (добуток) $GF : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$. Тому можна говорити про «категорію категорій» Cat, в якій об'єкти — це категорії, а морфізми — функтори. *Тотожний функтор* $\mathbf{1}_{\mathscr{A}}$, очевидно, визначається парою тотожних відображень: $\mathbf{1}_{\mathscr{A}} X = X$, $\mathbf{1}_{\mathscr{A}} \alpha = \alpha$.

132 Приклад 1.3.2. (1) «Забуваючі функтори» $\mathsf{Gr} \to \mathsf{Set}$, $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$, $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Gr}$ тощо.

(2) Конструкція вільної групи $X \mapsto \operatorname{Fr} X$ дає функтор $\mathsf{Set} \to \mathsf{Gr}$. Так само конструкція вільної категорії дає функтор $\mathsf{Quiv} \to \mathsf{Cat}$, де Quiv — категорія сагайдаків.

(3) (Вправа) Доведіть, що, якщо розглядати квазівпорядковані множини $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}'$, як категорії (приклад 1.1.2(4), то функтори $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ ототожнюються з монотонно неспадними відображеннями.

Візначимо ще один важливи клас функторів — *представницькі функтори.*

133 Означення 1.3.3. Нехай $A \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$. *Представницький функтор*, визначений об'єктом A — це функтор $\mathscr{A}^A : \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$, який визначається в такий спосіб:

- $\mathscr{A}^A(X) = \mathscr{A}(A, X)$ для кожного об'єкта $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$.
- Якщо $\alpha : X \to Y$, то $\mathscr{A}^A\alpha : \mathscr{A}(A, X) \to \mathscr{A}(A, Y)$ — це відображення $\alpha\cdot$ «*множення на* α *зліва*», яке переводить $\xi : A \to X$ у $\alpha\xi : A \to Y$.

Виконання всіх умов очевидне.

Будь-який функтор $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ індукує для кожної пари об'єктів $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ відображення $F(X, Y) : \mathscr{A}(X, Y) \to \mathscr{B}(FX, FY)$.

134 Означення 1.3.4. Функтор $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ зветься

- *строгим*, якщо всі відображення $F(X, Y)$ ін'єктивні;
- *повним*, якщо всі відображення $F(X, Y)$ сюр'єктивні;
- *щільним* (або *істотно сюр'єктивним*) якщо для кожного об'єкту $B \in \operatorname{Ob} \mathscr{B}$ існує об'єкт $A \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ такий, що $B \simeq FA$.

Очевидно, композиція строгих (повних, щільних) функторів є знову строгим (відповідно, повним, щільним) функтором.

Множину функторів $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ можна перетворити у *категорію функторів* $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

135 Означення 1.3.5. Якщо $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — два функтори, то *морфізмом* $\Phi : F \to G$ зветься таке відображення $\Phi : \operatorname{Ob} \mathscr{A} \to \operatorname{Mor} \mathscr{B}$, що $\Phi X : FX \to GX$ і для кожного морфізму $\xi \in \mathscr{A}(X, Y)$ діаграма

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F\xi"] \arrow[d, "\Phi X"'] & FY \arrow[d, "\Phi Y"] \\ GX \arrow[r, "G\xi"'] & GY \end{tikzcd}$$

є комутативною, тобто $G\xi \cdot \Phi X = \Phi Y \cdot F\xi$.

Якщо $\Psi : G \to H$ — ще один морфізм функторів, добуток $\Psi\Phi$ визначається «поточково»: $(\Psi\Phi)X = \Psi X \cdot \Phi X$.

Тотожний морфізм 1_F функтора F визначається в очевидний спосіб: $1_F X = 1_{FX}$.

Множину морфізмів $F \to G$ позначають $\mathrm{Hom}(F, G)$.

Очевидно, морфізм функторів $\Phi : F \to G$ є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли всі морфізми ΦA є ізоморфізмами.

136 Приклад 1.3.6. Морфізм $\alpha \in \mathscr{A}(A, B)$ індукує морфізм функторів $\mathscr{A}^\alpha : \mathscr{A}^B \to \mathscr{A}^A$ такий, що відображення $\mathscr{A}^\alpha X : \mathscr{A}^B(X) \to \mathscr{A}^A(X)$ — це відображення $\cdot\alpha$ «*множення на* α *справа*», яке переводить $\xi : B \to X$ у $\xi\alpha : A \to X$.

(Перевірте, що це дійсно морфізм функторів.)

Наступний результат та його наслідки відіграє важливу роль у теорії категорій і в усій сучасній математиці.

137 Теорема 1.3.7 («Лема Йонеди»). *Нехай* $F : \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$. *Відображення* $\Phi \mapsto (\Phi A)1_A$ *є біекцією* $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}^A, F) \to FA$.

Доведення. Нехай $a = \Phi_A(1_A)$. Якщо $\Phi : \mathscr{A}^A \to F$ — морфізм функторів, для кожного морфізму $\xi : A \to X$ має місце комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(A,A) \arrow[r, "\xi\cdot"] \arrow[d, "\Phi A"'] & \mathscr{A}(A,X) \arrow[d, "\Phi X"] \\
FA \arrow[r, "F\xi"'] & FX,
\end{tikzcd}$$

звідки $(F\xi)(\Phi_A)1_A = F\xi(a) = (\Phi X)(\xi\cdot)1_A = \Phi X(\xi)$, тобто Φ визначається через a: $\Phi X(\xi) = F\xi(a)$. Тому якщо $\Phi A(1_A) = \Psi A(1_A)$, то $\Phi = \Psi$ і відображення $\Phi \mapsto \Phi A(1_A)$ ін'єктивне.

Нехай тепер $a \in FA$ — довільний елемент. Визначимо відображення $\Phi X : \mathscr{A}(A, X) \to FX$ правилом $\Phi X(\xi) = F\xi(a)$. Ми залишаємо читачеві, як просту вправу, перевірку того, що відповідність $X \mapsto \Phi X$ є морфізмом функторів $\mathscr{A}^A \to F$ і $a = \Phi A(1_A)$.

Отже, відображення $\Phi \mapsto \Phi A(1_A)$ також сюр'єктивне. $\square$

137 Вправа 1.3.8. Нехай $\Phi : \mathscr{A}^A \to \mathscr{A}^B$, $\alpha = \Phi A(1_A)$. Перевірте, що $\Phi = \mathscr{A}^\alpha$, тобто $\Phi X(\xi) = \xi\alpha$ для кожного $\xi : B \to X$.

Перевірте також, що $\mathscr{A}^{\beta\alpha} = \mathscr{A}^\alpha \mathscr{A}^\beta$ (якщо добуток $\beta\alpha$ визначений).

Звідси випливає, зокрема, що $A \simeq B$ тоді й лише тоді, коли $\mathscr{A}^A \simeq \mathscr{A}^B$. Неформально кажучи, «об'єкт повністю характеризується морфізмами, які в ньому починаються».

Функтор $\mathscr{A} \to \mathsf{Set}$, ізоморфний деякому представницькому функтору, зветься *представлюваним*.

138 Означення 1.3.9. (1) *Дуальною категорією* до категорії $\mathscr{A}$ зветься категорія $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ з тими ж множинами об'єктів і морфізмів, тими ж тотожними морфізмама, але з іншими визначеннями початків, кінців і добутків. Саме:

- Якщо $\alpha : A \to B$ в категорії $\mathscr{A}$, то $\alpha : B \to A$ в категорії $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$.
- Добуток $\alpha\beta$ в категорії $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ — це добуток $\beta\alpha$ в категорії $\mathscr{A}$.

Інколи, для зручності, розглядаючи морфізми в дуальній категорії, їх теж помічають значком ${}^{\mathrm{op}}$. Тоді, зокрема, останнє правило запишетьтся так: $\alpha^{\mathrm{op}}\beta^{\mathrm{op}} = (\beta\alpha)^{\mathrm{op}}$.

З теореми 1.3.8 і вправи 1.3.9 випливає такий результат.

139 Наслідок 1.3.10. *Пара відображень $A \mapsto \mathscr{A}^A$ та $\alpha \mapsto \mathscr{A}^\alpha$ визначає строгий повний функтор $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$.*

Цей функтор інколи зветься «зануренням Йонеди».

Очевидно, функтор $F : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ — це пара відображень $F_{\mathrm{Ob}} : \operatorname{Ob}\mathscr{A} \to \operatorname{Ob}\mathscr{B}$, $F_{\mathrm{Mor}} : \operatorname{Mor}\mathscr{A} \to \operatorname{Mor}\mathscr{B}$ така, що

$$\begin{aligned}
&\text{якщо } \alpha : A \to B, \text{ то } F\alpha : FB \to FA;\\
&F1_A = 1_{FA};\\
&F(\alpha\beta) = F\beta \cdot F\alpha.
\end{aligned}$$

Таку пару часто звуть *контраваріантним функтором* з $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ (ми теж вживатимемо цей термін). При цьому «звичайні» функтори звуть *коваріантними.*

Так само, як і серед коваріантних функторів $\mathscr{A} \to \mathsf{Set}$, серед контраваріантних функторів $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ важливе місце займають *представницькі* функтори $\mathscr{A}_A$, де $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$. Функтор $\mathscr{A}_A$ визначається правилами

- $\mathscr{A}_A(X) = \mathscr{A}(X, A)$ для кожного об'єкта $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$.
- Якщо $\alpha : X \to Y$, то $\mathscr{A}_X A\alpha : \mathscr{A}(Y, A) \to \mathscr{A}(X, A)$ — це відображення $\cdot\alpha$ «*множення на α справа*», яке переводить $\xi : A \to \mathrm{H}$ у $\xi\alpha : A \to X$.

З точки зору категорії $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, це — функтор $(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})^A$.

Лема Йонеди та її наслідок для контраваріантних функторів приймають такий вигляд.

137a Теорема 1.3.11. (1) *Нехай $F : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$. Відображення $\Phi \mapsto (\Phi A)1_A$ є біекцією $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}_A, F) \to FA$.*

(2) *Пара відображень $A \mapsto \mathscr{A}_A$ та $\alpha \mapsto \mathscr{A}_\alpha$ визначає строгий повний функтор $\mathscr{A} \to \mathsf{Fun}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$.*

Якщо категорії $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ є $\Bbbk$-категоріями, де $\Bbbk$ — комутативне кільце, найчастіше розглядають $\Bbbk$-*лінійні функтори* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, тобто такі, що $F(\alpha + \beta) = F\alpha + F\beta$ для довільних морфізмів зі спільним початком і кінцем, а $F(c\alpha) = cF\alpha$ для довільного $c \in \Bbbk$. Такі функтори утворюють повну підкатегорію $\mathsf{Fun}_\Bbbk(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ у категорії всіх функторів. Якщо F, G — два $\Bbbk$-лінійні функтори, то множина морфізмів $\operatorname{Hom}(F, G)$ має структуру $\Bbbk$-модуля, якщо визначити суму пари морфізмів і добуток морфізму на скаляр $\lambda \in \Bbbk$ правилами $(\varphi + \psi)A = \varphi A + \psi A$ і $(\lambda\varphi)X = \lambda(\varphi X)$. Отже, категорія $\mathsf{Fun}_\Bbbk(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ знову є $\Bbbk$-лінійною.

Зауважимо, що, якщо категорія $\mathscr{A}$ є $\Bbbk$-категорією, легко бачти, що представницькі функтори $\mathscr{A}^A$ є $\Bbbk$-лінійними функторами $\mathscr{A} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$. Категорію $\mathsf{Fun}_\Bbbk(\mathscr{A}, \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod})$ часто звуть *категорією $\mathscr{A}$-модулів*, а її об'єкти — *$\mathscr{A}$-модулями*. Ми теж будемо користуватися цими термінами і позначати цю категорію через $\mathscr{A}\text{-}\mathsf{Mod}$. Якщо M, N — $\mathscr{A}$-модулі, множину $\Bbbk$-лінійних морфізмів $M \to N$ позначають $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, N)$. У цьому випадку «занурення Йонеди» є зануренням $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathscr{A}\text{-}\mathsf{Mod}$.

Якщо $F : \mathscr{A} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ — деякий $\mathscr{A}$-модуль, $a \in FA$ і $\alpha : A \to B$, то замість $F\alpha(a)$ пишуть αa. Умови на функтор F переписуються так:

$$\begin{aligned}
&\text{якщо } a \in FA,\ \alpha : A \to B, \text{ то } \alpha a \in FB,\\
&\beta(\alpha a) = (\beta\alpha)a,\\
&1_A a = a,\\
&(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,\\
&\alpha(a + b) = \alpha a + \beta a,\\
&(\lambda\alpha)a) = \alpha(\lambda a) = \lambda(\alpha a), \text{ де } \lambda \in \Bbbk.
\end{aligned}$$

Ці умови (крім першої) дійсно мають такий самий вигляд, як у означенні модуля над алгеброю.

Якщо $F : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$, то, замість $(F\alpha)a$, де $a \in FB$, $\alpha : B \to A$, пишуть $b\alpha$, F звуть також *правим $\mathscr{A}$-модулем*, а категорію правих $\mathscr{A}$-модулів позначають $\mathsf{Mod}\text{-}\mathscr{A}$. Пропонуємо читачеві записати аналоги попердніх формул для правих модулів. При цьому часто замість $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(M, N)$ пишуть також $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, N)$.

s14

1.4. Еквівалентності категорій

У більшості математичних теорій одним з фундаментальних понять є поняття *ізоморфізму*, тобто «однаковості» двох математичних структур. Звичайно, неважко дати й означення ізоморфізму категорій (читач може це зробити). Але у теорії категорій і в її застосуваннях набагато важливішим є інше поняття — *еквівалентності категорій.*

141 Означення 1.4.1. Функтор $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ зветься *еквівалентністю*, якщо він є строгим, повним і щільним.

Ізоморфізми характерні тим, що у них є обернені ізоморфізми. Якщо F — еквівалентність, вона може не мати оберненого функтора, оскільки ані F_{Ob}, ані F_{Mor} не зобов'язані бути біекціями. Але є деяке узагальнення оберненого функтора, яке й відіграє основну роль у розгляді еквівалентностей.

142 Означення 1.4.2. Функтор $F' : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ зветься *квазіоберненим* до функтора $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, якщо $F'F \simeq 1_{\mathscr{A}}$, а $FF' \simeq 1_{\mathscr{B}}$.

143 Теорема 1.4.3. *Функтор $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ є еквівалентністю, якщо у нього є квазіобернений.*

З цієї теореми безпосередньо випливає наслідок, доведення якого ми залишаємо читачеві.

144 Наслідок 1.4.4. *Відношення «існує еквівалентність $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$» є відношенням еквівалентності на класі категорій, тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним.*

Якщо така еквівалентність існує, кажуть, що $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ — *еквівалентні категорії.*

Доведення Теореми 1.4.3. Нехай функтор $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ має квазіобернений $F' : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Тоді, зокрема $F'FB \simeq B$ для кожного об'єкта $B \in \operatorname{Ob}\mathscr{B}$, отже функтор F щільний. Фіксуємо ізоморфізм $\Phi : F'F \to 1_{\mathscr{A}}$. Тоді, згідно з Означенням 1.3.5, $(\Phi A')(F'F\alpha) = \alpha(\Phi A)$ для кожного морфізму $\alpha \in \mathscr{A}(A, A')$, тобто $\alpha = (\Phi A')(F'F\alpha)(\Phi A)^{-1}$, тому з $F\alpha = F\alpha'$ випливає $\alpha = \alpha'$ і F є строгим. Так само й F' є строгим. Нехай тепер $\beta : FA \to FA'$, $\alpha = (\Phi A')(F'\beta)(\Phi A)^{-1} : A \to A'$. Тоді $F'\beta = (\Phi A')^{-1}\alpha(\Phi A) = F'F\alpha$ і $\beta = F\alpha$. Отже, F є й повним, тобто є еквівалентністю.

Навпаки, нехай $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — еквівалентність. Для кожного об'єкту $B \in \mathscr{B}$ існує об'єкт $A \in \mathscr{A}$ такий, що $F'A \simeq B$. Фіксуємо один з таких об'єктів, позначивши його через $F'B$, й один з ізоморфізмів $FF'B \to B$, позначивши його через ΦB. При цьому, якщо $B = FA$ ми виберемо $F'B = A$ і $\Phi B = 1_B$. Для кожного морфізму $\beta : B \to B'$ визначимо $F'\beta : F'B \to F'B'$ як такий морфізм, що $FF'\beta = (\Phi B')^{-1}\beta(\Phi B)$ (він існує й є єдиним, оскільки F є повним і строгим. Отже ми визначили відображення F' на об'єктах і на морфізмах. Рівність $F'1_B = 1_{F'B}$ випливає з побудови. Нехай $\beta' : B' \to B''$. Тоді

$$
\begin{aligned}
F(F'\beta' \cdot F'\beta) = (FF'\beta')(FF'\beta) = (\Phi B'')^{-1}\beta'(\Phi B')(\Phi B')^{-1}\beta(\Phi B) = \\
= (\Phi B'')^{-1}\beta'\beta(\Phi B) = FF'(\beta'\beta),
\end{aligned}
$$

звідки $F'\beta' \cdot F'\beta = F'(\beta\beta')$, отже F' є функтором. За побудовою також $F'FA = A$ і $F'F\alpha = \alpha$ для кожного морфізму $\alpha : A \to A'$, тобто $F'F = \mathbf{1}_{\mathscr{A}}$. Залишилось перевірити, що відображення $\Phi : \operatorname{Ob}\mathscr{B} \to \operatorname{Mor}\mathscr{B}$ є морфізмом (а тому й ізоморфізмом) $FF' \to 1_B$. Але рівність $\beta \cdot \Phi B = \Phi B' \cdot FF'\beta$, яку треба для цього перевірити, також випливає з побудови. □

145 Приклад 1.4.5. (1) Якщо $\mathscr{C}'$ — підкатегорія категорії $\mathscr{C}$, $I : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ — її занурення, то I є еквівалентністю категорій тоді й лише тоді, коли підкатегорія $\mathscr{C}'$ є повною і кожен об'єкт категорії $\mathscr{C}$ ізоморфний деякому об'єкту з підкатегорії $\mathscr{C}'$.

(2) Нехай $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — строгий повний функтор. Його *істотним образом* зветься повна підкатегорія $\mathsf{Im}\, F \subseteq \mathscr{B}$, яка складається з об'єктів, ізоморфних об'єктам вигляду FA, де $A \in \mathscr{A}$. Очевидно, тоді F визначає еквівалентність $\mathscr{A} \to \mathsf{Im}\, F$. З огляду на це, такі

функтори часто звуть *повними зануреннями*. Наприклад, з теореми Йонеди для контраваріантних функторів (Теорема 1.3.11) випливає, що кожна категорія $\mathscr{A}$ еквівалентна категорії контраваріантних представлюваних функторів $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$.

(3) Розглянемо функтор $V : \mathsf{Mat}(\Bbbk) \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$ такий, що $Vn = \Bbbk^n$, а $V\alpha$, де $\alpha : n \to m$, тобто $\alpha \in \mathrm{Mat}(m \times n, \Bbbk)$, визначається як гомоморфізм $\Bbbk^n \to \Bbbk^m$, який переводить вектор (стовпчик) v у добуток αv. Цей функтор, як відомо з елементарної лінійної алгебри, є повним і строгим, а його істотний образ — це повна підкатегорія $\mathsf{vec}_\Bbbk$ в $\Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$, яка складається з вільних модулів скінченного рангу. Отже, категорія матриць над кільцем $\Bbbk$ еквівалентна категорії вільних $\Bbbk$-модулів скінченного рангу. Зокрема, якщо $\Bbbk$ — це поле, категорія матриць над $\Bbbk$ еквівалентна категорії скінченновимірних векторних просторів над цим полем.

s15

1.5. Спряжені функтори

Ще одним важливим поняттям загальної теорії категорій є поняття *спряжених функторів*. Перед тим, як розглянути їх, дамо природне означення *добутку категорій*.

151 Означення 1.5.1. (1) *Добутком категорій* $\mathscr{A}$ та $\mathscr{B}$ зветься категорія $\mathscr{A} \times \mathsf{B}$, в якій

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ob}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathrm{Ob}\,\mathscr{A} \times \mathrm{Ob}\,\mathscr{B},\\
&\mathrm{Mor}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) = \mathrm{Mor}\,\mathscr{A} \times \mathrm{Mor}\,\mathscr{B},\\
&\mathrm{id}_{(A,B)} = (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B),\\
&\iota_k(\alpha, \beta) = (\iota_k\alpha, \iota_k\beta)\ (k = 0, 1)\\
&(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', \beta\beta').
\end{aligned}
$$

Функтори, визначені на добутку $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ часто звуть $\mathscr{A} - \mathscr{B}$-*біфункторами*.

(2) Якщо обидві категорії $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ є $\Bbbk$-категоріями, їхній добуток також стає $\Bbbk$-категорією, якщо визначити

$$
\begin{aligned}
&(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta'),\\
&c(\alpha, be) = (c\alpha, c\beta)\ (c \in \Bbbk).
\end{aligned}
$$

(3) Якщо $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ — $\Bbbk$-категорії, функтор $F : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ зветься $\Bbbk$-*білінійним*, якщо виконані такі умови:

$$
\begin{aligned}
&F(\alpha + \alpha', \beta) = F(\alpha, \beta) + F(\alpha', \beta),\\
&F(\alpha, \beta + \beta) = F(\alpha, \beta) + F(\alpha, \beta'),\\
&F(c\alpha, \beta) = F(\alpha, c\beta) = cF(\alpha, be)\ (c \in \Bbbk).
\end{aligned}
$$

Якщо $\mathscr{C} = \Bbbk\text{-}\mathsf{Mod}$, такий функтор також зветься $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-*бімодулем*.

152 Приклад 1.5.2. *Регулярний біфунктор* (або *біфунктор морфізмів*) на категорії $\mathscr{A}$ визначається як функтор $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$, який переводить пару об'єктів (A, B) у множину $\mathscr{A}(A, B)$, а пару морфізмів (α, β), де $\alpha \in \mathscr{A}(A', A)$, $\beta \in \mathscr{A}(B, B')$ — у відображення $\mathscr{A}(A, B) \to \mathscr{A}(A', B')$, яке переводить $\gamma : A \to B$ у $\beta\gamma\alpha : A' \to B'$ (нагадаємо, що $\alpha \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A, A')$). Найчастіше цей функтор позначається тією самою літерою $\mathscr{A}$.

Якщо категорія $\mathscr{A}$ є $\Bbbk$-катогорією, то цей функтор є $\Bbbk$-білінійним, тобто $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$–$\mathscr{A}$-бімодулем. Маючи на увазі цей приклад, $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$–$\mathscr{A}$-бімодулі F часто звуть *$\mathscr{A}$-бімодулями.* При цьому елемент $F(\alpha, \beta)x$, де $x \in F(A, B)$, $\alpha : A' \to A$, $\beta : B \to B'$ позначають $\beta x\alpha$ (він належить $F(A', B')$).

Надалі ми позначатимемо значком $\Box$ «вільне місце», на яке можна підставляти аргументи функторів.

153 Означення 1.5.3. (1) Пара функторів (F, G), де $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, а $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ зветься *спряженою парою*, якщо існує ізоморфізм функторів $\varphi : \mathscr{B}(F\Box, \Box) \to \mathscr{A}(\Box, G\Box)$, як функторів $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathsf{Set}$. Зауважимо, що, згідно з означенням, φ є набором біекцій $\varphi(A, B) : \mathscr{B}(FA, B) \to \mathscr{A}(A, GB)$.

У цьому випадку також кажуть, що F є *лівим спряженим* до G, а G є *правим спряженим* до F. Ізоморфізм φ зветься *спряженістю* між F і G.

154 Приклад 1.5.4. (1) Легко бачити, що якщо G — квазіобернений до функтора F, то він є його і лівим, і правим спряженим (поясніть, чому).

(2) За означенням вільної групи $\operatorname{Fr} X$ і забуваючого функтора $\operatorname{neg} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Set}$, пара функторів $(\operatorname{Fr}, \operatorname{neg})$ є спряженою парою. Ізоморфізм $\varphi(X, G) : \mathsf{Set}(X, \operatorname{neg} G) \to \mathsf{Gr}(\operatorname{Fr} X, G)$, де X — довільна множина, а G — група, переводить відображення $f : X \to G$ у єдиний гомоморфізм груп $\operatorname{Fr} X \to G$, який відображає твірний $x \in X$ групи $\operatorname{Fr} X$ у елемент $f(x) \in G$. Перевірку того, що φ є морфізмом функторів залишаємо читачеві. Те, що $\varphi(X, G)$ є біекцією, відомо з теорії груп.

Те саме стосується забуваючих функторів $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$, $\mathsf{Cat} \to \mathsf{Quiv}$ тощо.

Виявляється, правий (лівий) спряжений до данного функтора (якщо він існує) визначений однозначно.

155 Теорема 1.5.5. *Нехай φ с$B(F\Box, \Box) \to \mathscr{A}(\Box, G\Box)$ — спряженість між функторами F і G, а $\varphi' : \mathscr{B}(F\Box, \Box) \to \mathscr{A}(\Box, G'\Box)$ — спряженість між функторами F і G'. Існує єдиний ізоморфізм функторів $f : G \to G'$ такий, що $\varphi'(A, B) = \mathscr{A}_{f(B)}\varphi(A, B)$, тобто $\varphi'(A, B)(\xi) = f(B)\varphi(A, B)(\xi)$ для всіх об'єктів $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ і всіх морфізмів $\xi : FA \to B$.*

Отже, правий спряжений до функтора F визначений з точністю до канонічного ізоморфізму.

Доведення. Правило $\psi(A,B) = \varphi'(A,B)\varphi^{-1}(A,B) : \mathscr{A}(A,GB) \to \mathscr{A}(A,G'B)$ визначає ізоморфізм функторів $\mathscr{A}(\square, G\square) \to \mathscr{A}(\square, G'\square)$. Зокрема, при фіксованому B, воно визначає ізоморфізм представницьких функторів $\mathscr{A}_{GB} \to \mathscr{A}_{G'B}$. За лемою Йонеди, існує єдиний морфізм $f(B) : GB \to G'B$ такий, що $\psi(A,B) = \mathscr{A}_{f(B)}$, тобто $\psi(A,B)(\xi) = f(B)\xi$. Якщо $\beta : B \to B'$, то діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}(A,GB) \arrow[r, "\psi(A{,}B)"] \arrow[d, "\cdot G\beta"'] & \mathscr{A}(A,G'B) \arrow[d, "\cdot G'\beta"'] \\
\mathscr{A}(A,GB') \arrow[r, "\psi(A{,}B')"] & \mathscr{A}(A,G'B')
\end{tikzcd}$$

є комутативною для кожного A, тобто $f(B')(G\beta)\xi = (G'\beta)f(B)\xi$ для кожного ξ, звідки $f(B')(G\beta) = G(\beta)f(B)$. Отже f є морфізмом (а тому ізоморфізмом) $G \to G'$.

Єдиність f очевидна, оскільки морфізм $\varphi(A,B)$ обертовний. □

156 Вправа 1.5.6. Сформулюйте й доведіть аналог теореми 1.5.5 для лівих спряжених функторів.

Наступна теорема дає критерій існування лівого або правого спряженого до деякого функтора.

157 Теорема 1.5.7. (1) *Правий спряжений до функтора* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *існує тоді й лише тоді, коли коли для кожного об'єкта* $B \in \mathscr{B}$ *функтор* $\mathscr{B}(F\square, B) : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ *є представлюваним.*

(2) *Лівий спряжений до функтора* $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ *існує тоді й лише тоді, коли коли для кожного об'єкта* $A \in \mathscr{A}$ *функтор* $\mathscr{A}(A, G\square) : \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$ *є представлюваним.*

Доведення. Ми доведемо перше твердження. Доведення другого залишається читачеві як вправа.

Необхідність випливає з означення правого спряженого функтора G: якщо він існує, то $\mathscr{B}(F\square, B) \simeq \mathscr{A}_{GB}$. Доведемо достатність. Для кожного об'єкта $B \in \mathscr{B}$ фіксуємо деякий об'єкт $GB \in \mathscr{A}$ і ізоморфізм $f(B) : \mathscr{B}(F\square, B) \to \mathscr{A}_{GB}$. Кожен морфізм $\beta : B \to B'$ індукує морфізм функторів $\beta\cdot : \mathscr{B}(F\square, B) \to \mathscr{B}(F\square, B')$ — множення ліворуч на β. Разом з ізоморфізмами $f(B)$ і $f(B')$ він визначає морфізм $G\beta = f(B')(\beta\cdot)f(B)^{-1} : GB \to GB'$. Якщо $\beta' : B' \to B''$, то

$$\begin{aligned}
G(\beta')G(\beta) &= f(B'')(\beta'\cdot)f(B')^{-1} \cdot f(B')(\beta\cdot)f(B)^{-1} = \\
&= f(B'')(\beta'\cdot)(\beta\cdot)f(B)^{-1} = f(B'')(\beta'\beta\cdot)f(B)^{-1} = G(\beta'\beta),
\end{aligned}$$

отже G є функтором $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$.

Покладемо $\varphi(A,B) = f(B)A : \mathscr{B}(FA,B) \to \mathscr{A}(A,GB)$. За означенням, при фіксованому B набір $\{\varphi(A,B)\}$ є морфізмом функторів $\mathscr{B}(F\square, B) \to \mathscr{A}\square, GB$. З іншого боку, за означенням $G\beta$, маємо рівність

$$f(B')(\beta\cdot) = (G\beta)f(B),$$

яка показує, що при фіксованому A набір $\{\varphi(A,B)\}$ є морфізмом функторів $\mathscr{B}(FA,\square) \to \mathscr{A}(A,G\square)$. Отже, φ задає морфізм (а тому й ізоморфізм) функторів $\mathscr{B}(F\square,\square) \to \mathscr{A}(\square,G\square)$. $\square$

Якщо φ — спряженість між F і G, то для кожного $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ визначені морфізми функторів $\varphi^+ : \mathbf{1}_{\mathscr{A}} \to GF$ і $\varphi^{\mathrm{L}} : FG \to \mathbf{1}_{\mathscr{B}}$. Саме, $\varphi^+(A) = \varphi(A,FA)(1_{FA}) : A \to GFA$, а $\varphi^-(B) = \varphi^{-1}(GB,B)(1_{GB}) : FGB \to B$.

s16

1.6. Тензорний добуток

Нехай $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ — деякі кільця, а M є $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем, тобто лівим $\boldsymbol{A}$-модулем і правим $\boldsymbol{B}$-модулем, причому $(ax)b = a(xb)$ для всіх $a \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{B}$, $x \in M$. Для кожного $\boldsymbol{A}$-модуля N група $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M,N)$ стає $\boldsymbol{B}$-модулем, якщо визначити добуток bf, де $f : M \to N$ правилом $(bf)(x) = f(xb)$. Отже, визначений функтор $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M,\square) : \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$. Ми побудуємо для нього лівий спряжений.

Для кожного $\boldsymbol{B}$-модуля L і лівого $\boldsymbol{B}$-модуля M визначимо *тензорний добуток* $M \otimes_{\boldsymbol{B}} L$ як абелеву групу з твірними $x \otimes y$, де $x \in M$, $y \in L$, і визначальними співвідношеннями

$$\begin{aligned} &x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y', \\ &(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \\ &xb \otimes y = x \otimes by \end{aligned}$$

для всіх $x, x' \in M$, $y, y' \in L$, $b \in \boldsymbol{B}$. Тензорний добуток є функтором $\boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathsf{Mod} \times \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$, якщо для довільних морфізмів $\alpha : M \to M'$ і $\beta : L \to L'$ визначити $\alpha \otimes \beta : M \otimes_{\boldsymbol{B}} L \to M' \otimes_{\boldsymbol{B}} L'$ правилом $(\alpha\otimes\beta)(x\otimes y) = \alpha(x) \otimes \beta(y)$. Якщо M був $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем, $M \otimes_{\boldsymbol{B}} L$ набуває будову $\boldsymbol{A}$-модуля, якщо покласти $a(x \otimes y) = ax \otimes y$. Отже, отримуємо функтор $M \otimes_{\boldsymbol{B}} \square : \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod}$.

conj

Теорема 1.6.1 (Формула спряженості). *У вищеописаній ситуації має місце ізоморфізм*

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M \otimes_{\boldsymbol{B}} L, N) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M,N)),$$

який визначається правилом

$$(\Phi f)(y)(x) = f(x \otimes y) \quad (x \in M,\ y \in L),$$

а обернений ізоморфізм

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M,N)) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M \otimes_{\boldsymbol{B}} L, N)$$

визначається правилом

$$(\Psi g)(x \otimes y) = g(y)(x).$$

При цьому Φ є морфізмом (отже ізоморфізмом) біфункторів від змінних $L \in \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$ та $N \in \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod}$, тобто ми маємо спряжену пару функторів $\big(M \otimes_{\boldsymbol{B}} \square,\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M,\square)\big)$.

Доведення. 1) Перевіримо, що $\Phi f(y) : M \to N$ є гомоморфізмом $\boldsymbol{A}$-модулів. Дійсно, якщо $a \in \boldsymbol{A}$, то

$$\Phi f(y)(ax) = f(ax \otimes y) = af(x \otimes y) = a(\Phi f(y)(x)),$$

бо f — гомоморфізм $\boldsymbol{A}$-модулів.

2) Перевіримо, що Φf є гомоморфізмом $\boldsymbol{B}$-модулів. Дійсно, якщо $b \in \boldsymbol{B}$, то

$$\Phi f(by)(x) = f(x \otimes by) = f(xb \otimes y) = \Phi f(y)(xb) = b(\Phi f(y))(x),$$

згідно з означенням дії $\boldsymbol{B}$ на $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$.

Отже, визначення Φ коректне.

3) Перевіримо, що визначення Ψg коректне, тобто узгоджене зі співвідношення між твірними тензорного добутку. Дійсно, якщо $b \in \boldsymbol{B}$, то

$$\Psi g(xb \otimes y) = g(y)(xb) = bg(y)(x) = g(by)(x) = \Psi g(x \otimes by),$$

оскільки g — гомоморфізм $\boldsymbol{B}$-модулів.

4) Перевіримо, що Ψg є гомоморфізмом $\boldsymbol{A}$-модулів. Дійсно, якщо $a \in \boldsymbol{A}$, то

$$\Psi g(ax \otimes y) = g(y)(ax) = ag(y)(x) = a\Psi g(x \otimes y),$$

бо $g(y)$ — гомоморфізм $\boldsymbol{A}$-модулів.

Отже, Ψ також визначено коректно. З означень Φ і Ψ одразу випливає, що ці відображення взаємно обернені.

5) Перевіримо, що Ψ узгоджений з гомоморфізмами $\alpha : L \to L'$, тобто комутативною є діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M \otimes_{\boldsymbol{B}} L', N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M \otimes_{\boldsymbol{B}} L, N) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L', \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)),
\end{tikzcd}$$

в якій горизонтальні стрілки індуковані гомоморфізмом α, а вертикальні — це ізоморфізми Ψ. Дійсно, α індукує гомоморфізм $1 \otimes \alpha : M \otimes_{\boldsymbol{B}} L \to M \otimes_{\boldsymbol{B}} L'$ такий, що $(1 \otimes \alpha)(x \otimes y) = x \otimes \alpha y$. Отже, якщо $f : M \otimes_{\boldsymbol{B}} L' \to N$, то по горизонталі він переходить у гомоморфізм $f(1 \otimes \alpha) : M \otimes_{\boldsymbol{B}} L \to N$ такий, що $f(1 \otimes \alpha)(x \otimes y) = f(x \otimes \alpha y)$. Далі, по вертикалі, він перейде в гомоморфізм $\Phi(f(1 \otimes \alpha))$ такий, що $\Phi(f(1 \otimes \alpha))(y)(x) = f(1 \otimes \alpha)(y \otimes x) = f(x \otimes \alpha y)$. З іншого боку, по вертікалі f переходить у Φf такий, що $\Phi f(y)(x) = f(x \otimes y)$. Після цього, по горизонталі, він перейде у гомоморфізм $(\Phi f)\alpha$ такий, що $((\Phi f)\alpha)(y)(x) = \Phi f(\alpha y)(x) = f(x \otimes \alpha y)$, отже ця діаграма дійсно є комутативною.

6) Доведення того, що Ψ узгоджений з гомоморфізмами $\beta : N \to N'$, залишаємо читачеві, як вправу. $\square$

s17

1.7. Точні послідовності і функтори

171 Означення 1.7.1. Нехай дано скінченну або нескічниенну послідовність гомоморфізмів модулів над деякиі кільцем $\boldsymbol{A}$

$$\dots M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots$$

Кажуть, що ця послідовність є *точною у члені* M_n, якщо $\operatorname{Ker}\alpha_n = \operatorname{Im}\alpha_{n-1}$. Якщо ця послідовність є точною у кожному члені, кажуть, що вона є *точною.*

172 Приклад 1.7.2.

(1) Послідовність $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N$ є точною, якщо вона є точною у члені M. Оскільки ліворуч від M стоїть 0, це означає, що $\operatorname{Ker}\alpha = 0$, тобто α — монік.

(2) Послідовність $M \xrightarrow{\alpha} N \to 0$ є точною, якщо вона є точною у члені M. Оскільки праворуч від M стоїть 0, це означає, що $\operatorname{Im}\alpha = N$, тобто α — епік.

(3) Послідовність

left
$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \tag{1.7.1}$$

є точною, якщо вона є точною у членах M і N. Ми бачили, що точність у члені M означає, що α — монік, тобто ізоморфно відображає M на $\operatorname{Im}\alpha$. Точність у члені N означає, що $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Отже точність даної послідовності означає, що α ізоморфно відображає M на $\operatorname{Ker}\beta$. У цьому випадку зазавияай кажуть, що *α є ядром β*

(4) Послідовність

right
$$M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \to 0 \tag{1.7.2}$$

є точною, якщо вона є точною у членах M і N. Ми бачили, що точність у члені N означає, що β — епік, тобто ізоморфно відображає $N/ker\beta$ на L. Точність у члені N означає, що $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Отже точність даної послідовності означає, що β ізоморфно відображає $N/\operatorname{Im}\alpha$ на L. Нагадаємо, що фактормодуль $N/\operatorname{Im}\alpha$ зветься *коядром* гомоморфізму α і позначається $\operatorname{Coker}\alpha$. Тому зазвичай кажуть, що точність даної послідовності означає, що *β є коядром α.*

(5) *Короткою точною послідовністю* зветься точна послідовність вигляду

short
$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \to 0. \tag{1.7.3}$$

Як ми бачили, точність цієї послідовності означає, що α є ядром β і одночасно β є коядром α.

173 Вправа 1.7.3. Доведіть, що послідовність $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N$ є точною тоді й лише тоді, коли існують точні послідовності

$$M \xrightarrow{\alpha'} M' \to 0,$$
$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha''} N \xrightarrow{\beta'} L' \to 0,$$
$$0 \to L' \xrightarrow{\beta''} \to 0$$

такі, що

$$\alpha = \alpha''\alpha' \text{ і } \beta = \beta''\beta'.$$

Важливим фактом є те, що точність послідовностей можна охарактеризувати у категорних термінах,

exact-h Теорема 1.7.4. (1) *Послідовність (1.7.1) є точною тоді й лише тоді, коли для кожного модуля X точною є послідовність*

left-h (1.7.4) $$0 \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(X, M) \xrightarrow{\alpha\cdot} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(X, N) \xrightarrow{\beta\cdot} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(X, L).$$

(2) *Послідовність (1.7.2) є точною тоді й лише тоді, коли для кожного модуля X точною є послідовність*

right-h (1.7.5) $$0 \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(L, X) \xrightarrow{\cdot\beta} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, X) \xrightarrow{\cdot\alpha} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, X).$$

Доведення. Ми доведемо друге твердження, залишивши перше як вправу.

Нехай послідовність (1.7.2) є точною. Тоді β — епік, тобто з рівності $\beta\gamma = 0$ випливає, що $\gamma = 0$. Це й означає, що відображення $\beta\cdot$ — монік, тобто послідовність (1.7.5) точна у члені $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(L, X)$.

Точність у члені $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, X)$ означає, що $\operatorname{Im}(\cdot\beta) = \operatorname{Ker}(\cdot\alpha)$ Оскільки $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, то $\beta\alpha = 0$, звідки $(\cdot\alpha)(\cdot\beta) = \cdot(\beta\alpha) = 0$, тобто $\operatorname{Im}(\cdot\beta) \subseteq \operatorname{Ker}(\cdot\alpha)$.

Припустимо, що $\gamma \in \operatorname{Ker}(\cdot\alpha)$, тобто $\gamma\alpha = 0$. Це означає, що $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$, а тоді γ розкладається у добуток $N \xrightarrow{\beta} L \simeq N/\operatorname{Im}\alpha \xrightarrow{\gamma'} X$. Отже $\gamma = \gamma'\beta \in \operatorname{Im}(\cdot\beta)$, тобто $\operatorname{Ker}(\cdot\alpha) \subseteq \operatorname{Im}(\cdot\beta)$, $\operatorname{Im}(\cdot\beta) = \operatorname{Ker}(\cdot\alpha)$ і послідовність (1.7.5) є точною.

Нехай тепер точною є послідовність (1.7.5). Тоді $\beta\cdot$ — монік, тобто з рівності $\beta\gamma = 0$ випливає, що $\gamma = 0$. Це й означає, що відображення β — епік, тобто послідовність (1.7.2) точна у члені L.

Точність у члені N означає, що $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Оскільки $\operatorname{Im}(\cdot\beta) = \operatorname{Ker}(\cdot\alpha)$, а $\beta = 1_N$
$bein\operatorname{Im}(\cdot\beta)$ то $\beta\alpha = 0$, тобто $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\beta$.

Розглянемо тепер природну сюр'єкцію $N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{Im}\alpha$. Очевидно, $\pi\alpha = 0$, отже $\pi \in \operatorname{Ker}(\cdot\alpha) = \operatorname{Im}\cdot\beta$, тобто $\pi = \pi'\beta$ для деякого π'. Але тоді $\operatorname{Ker}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\alpha$ і $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$. $\square$

З поняттям точних послідовностей пов'язане поняття точних функторів. Воно визначається і для звичайних (коваріантних) функторів, і для контраваріантних функторів.

exact-f Означення 1.7.5. (1) Функтор $F : \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$ зветься
(a) *точним справа*, якщо для кожної короткої точної послідовності (1.7.3) точною є послідовність

$$FM \xrightarrow{F\alpha} FN \xrightarrow{F\beta} FL \to 0;$$

(b) *точним зліва*, якщо для кожної короткої точної послідовності (1.7.3) точною є послідовність

$$0 \to FM \xrightarrow{F\alpha} FN \xrightarrow{F\beta} FL.$$

(2) Функтор $G : \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$ зветься
(a) *точним справа*, якщо для кожної короткої точної послідовності (1.7.3) точною є послідовність

$$GL \xrightarrow{G\beta} GN \xrightarrow{G\alpha} GM \to 0;$$

(b) *точним зліва*, якщо для кожної короткої точної послідовності (1.7.3) точною є послідовність

$$0 \to GL \xrightarrow{G\beta} GN \xrightarrow{G\alpha} GM.$$

Якщо функтор є точним і зліва, і справа, він зветься *точним.*

Приклад 1.7.6. З теореми 1.7.4 випливає, що функтор Hom є точним зліва і як коваріантний функтор за другою змінною, і як контраваріантний функтор за першою змінною.

Корисним є наступний факт, який випливиає з теореми 1.7.4.

Теорема 1.7.7. *Якщо (F, G) — спряжена пара функторів, де $F : \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$, $G : \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod}$, то функтор F є точним справа, а функтор G є точним зліва.*

Доведення. Якщо послідовність (1.7.3) є точною, то для кожного $\boldsymbol{B}$-модуля X точною є послідовність

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(L, GX) \xrightarrow{\cdot\beta} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, GX) \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, GX).$$

Ізоморфізм спряженості переводить її у точну послідовність

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(FL, X) \xrightarrow{\cdot\beta} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(FN, X) \xrightarrow{\cdot\alpha} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(FM, X).$$

За теоремою 1.7.4, послідовність $FM \xrightarrow{F\alpha} FN \xrightarrow{F\beta} FL \to 0$ є точною, тобто функтор F є точним справа.

Аналогічне доведення точності зліва функтора G залишається як вправа. □

Тепер з формули спряженості (теорема 1.6.1) отримуємо такий наслідок.

exact-tensor

Наслідок 1.7.8. *Тензорний добуток є точним справа (за кожною змінною).*

1.8. Проективні та ін'єктивні модулі

s18

pro-in

Означення 1.8.1. $\boldsymbol{A}$-модуль M зветься

- *проективним*, якщо функтор $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \square)$ є точним;
- *ін'єктивним*, якщо функтор $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\square, M)$ є точним.

pro-in-1

Зауваження 1.8.2. Оскільки ці функтори є точними зліва, то модуль M є

- проективним тоді й лише тоді, коли функтор $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \square)$ переводить епіки в епіки;
- ін'єктивним тоді й лише тоді, коли функтор $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\square, M)$ переводить моніки в епіки (нагадаємо, що цей функтор є контраваріантним).

Інакше кажучи, M є

- проективним, якщо для довільного епіка $\alpha : N \to L$ і кожного гомоморфізму $\beta : M \to L$ існує гомоморфізм $\gamma : M \to N$ такий, що $\beta = \alpha\gamma$;
- ін'єктивним, якщо для довільного моніка $\alpha : L \to N$ і кожного гомоморфізму $\beta : L \to M$ існує гомоморфізм $\gamma : N \to M$ такий, що $\beta = \gamma\alpha$.

free-pro

Приклад 1.8.3. Кожен вільний модуль M є проективним. Дійсно, якщо B — база M, то задати гомоморфізм $\beta : M \to L$ — все одно, що задати відображення множин $B \to L$. Оскільки α епік, для кожного елемента $\beta(b)$ $(b \in B)$ є такий елемент $x_b \in N$, що $be(b) = \alpha(x_b)$. Тоді відображення $B \to N$ таке, що $\gamma(b \mapsto x_b$, задає гомоморфізм $\gamma : M \to N$ такий, що $\beta = \alpha\gamma$.

З визначення прямої суми легкл випливає, що прямі суми і прямі доданки проективних (ін'єктивних) модулів знову є проективними (ін'єктивними).

pro-in-2

Теорема 1.8.4. (1) *Наступні умови рівносильні:*
   (a) *Модуль M є проективним.*
   (b) *Для кожного епіка $\alpha : N \to M$ існує правий обернений, тобто такий $\gamma : M \to N$, що $\alpha\gamma = 1_M$. (Тоді $N = \mathrm{Im}\,\gamma \oplus \mathrm{Ker}\,\alpha$ і $\mathrm{Im}\,\gamma \simeq M$).*

(2) *Наступні умови рівносильні:*
   (a) *Модуль M є ін'єктивним.*
   (b) *Для кожного моніка $\alpha : M \to N$ існує лівий обернений, тобто такий $\gamma : N \to M$, що $\gamma\alpha = 1_M$. (Тоді $N = \mathrm{Im}\,\alpha \oplus \mathrm{Ker}\,\gamma$ і $\mathrm{Im}\,\alpha \simeq M$).*

Доведення. (1) Якщо M є проективним, то існування γ випливає з означення, якщо покласти $\beta = 1_M$. Навпаки, нехай умова (b) виконана. Для довільного епіка $\alpha : N \to L$ і довільного $\beta : M \to L$ розглянемо підмодуль $N' \subseteq N \oplus M$, який складається з тих пар (x, y), для яких $\alpha(x) = \beta(y)$. Нехай α' — обмеження на N' проекції $N \oplus M \to M$, а β' — обмеження на N' проекції $N \oplus M \to N$. Тоді $\alpha\beta' = \beta\alpha'$ З того, що α епік, одразу випливає, що α' теж епік. Тому існує $\gamma' : M \to N'$ такий, що $\alpha'\gamma' = 1_M$. Якщо $\gamma = \beta'\gamma'$, то $\alpha\gamma = \alpha\beta'\gamma' = \beta\alpha'\gamma' = \beta$.

(2) доводиться аналогічно. У другій частині доведення, якщо $\alpha : L \to N$ — монік, а $\beta : L \to M$ — довільний, треба розглянути фактормодуль $N \oplus M$ за підмодулем, який складається з усіх пар $(\alpha(x), -\beta(x))$ $(x \in L)$. Подробиці доведення залишаємо як вправу. $\square$

pro-free

Наслідок 1.8.5. *$\boldsymbol{A}$-модуль M є проективним тоді й лише тоді, коли він ізоморфний прямому доданку вільного модуля. При цьому M є скінченнопородженим тоді й лише тоді, коли він є прямим доданком скінченнопородженого модуля скіченного рангу.*

Доведення. Те, що прямий доданок вільного модуля є проективним, відмічено у прикладі 1.8.3. При цьому, якщо вільний модуль мав скінченну базу, всі його прямі доданки є скінченнопородженими. Навпаки, нехай M проективний, S — деяка множини його твірних. Якщо $\widetilde{M}$ — вільний модуль з базою S, то тотожне відображення $S \to S$ задає епік $\alpha : \widetilde{M} \to M$. Згідно з теоремою 1.8.4, тоді M ізоморфний прямому доданку $\widetilde{M}$. $\square$

Зауважимо, що, на відміну від попередніх тверджень, цей наслідок не має аналогу для ін'єктивних модулів. Зате для ін'єктивних модулів є таке твердження, яке не має аналогів для проективних.

in-ideal

Теорема 1.8.6. *$\boldsymbol{A}$-модуль M є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли для кожного лівого ідеалу $I \subseteq \boldsymbol{A}$ і кожного гомоморфізму $\beta : I \to M$ існує гомоморфізм $\gamma : \boldsymbol{A} \to M$ такий, що $\gamma|_I = \beta$.*

Нагадаємо, що $\gamma(a) = au$, де $u = \gamma(1)$. Отже, існування γ означає, що існує такий елемент $u \in M$, що $\beta(a) = au$ для всіх $a \in I$.

Доведення. Необхідність очевидна (це просто частковий випадок означення). Доведемо достатність.

Нехай $\alpha : L \to N$ — монік. Ототожнимо L з образом α і вважатимемо, що $L \subseteq N$. Для кожного гомоморфізму $\beta : L \to N$ розглянемо множину пар $\mathfrak{B} = \{(L', \beta')\}$, де $L \subseteq L' \subseteq N$, а $\beta' : L' \to M$ — такий, що $\beta'|_L = \beta$. На цій множині визначимо порядок, вважаючи, що $(L', \beta') \leqslant (L'', \beta'')$, якщо $L' \subseteq L''$ і $\beta''|_{L'} = \beta'$. Якщо $\mathfrak{L} = \{\ (L_\lambda, \beta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\ \}$ — ланцюг в $\mathfrak{B}$, то пара $(\tilde{L}, \tilde{\beta})$, де $\tilde{L} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$, а $\tilde{\beta}(x) = \beta_\lambda(x)$, якщо $x \in L_\lambda$, є верхньою межею для $\mathfrak{L}$. Отже, за лемою Цорна, в $\mathfrak{B}$ є максимальний елемент (L_0, β_0). Припустимо, що $L_0 \neq N$ і $x \notin L_0$. Розглянемо перетин $J = \boldsymbol{A}x \cap L_0$. Це підмодуль в $\boldsymbol{A}x$. Покладемо $I = \{\ a \in \boldsymbol{A} \mid ax \in J\ \}$. Це лівий ідеал в

$\boldsymbol{A}$ і визначений гомоморфізм $\bar{\beta} : I \to M$ такий, що $\bar{\beta}(a) = \beta_0(ax)$. За умовою, існує гомоморфізм $\bar{\beta}_1 : \boldsymbol{A} \to M$, для якого $\bar{\beta}_1(a) = \bar{\beta}(a)$ при $a \in I$. Зокрема, якщо $ax = 0$, то $a \in I$ і $\bar{\beta}_1(a) = 0$. Тому $\bar{\beta}_1$ визначає гомоморфізм $\boldsymbol{A}x \to M$ за правилом $\beta_1(ax) = \bar{\beta}_1(a)$. При цьому, якщо $ax \in J$, то $\beta_1(ax) = \bar{\beta}(a) = \beta_0(ax)$. Отже $\beta_1|_J = \beta_0|_J$, а тому визначений гомоморфізм $\beta' : \boldsymbol{A}x + L_0 \to M$, для якого $\beta'|_J = \beta_0|_J$, зокрема, $\beta'|_L = \beta$. Ми отримали пару (L', β'), де $L' = \boldsymbol{A}x + L_0$, яка строго більше за пару (L_0, β_0). Це неможливо, за вибором (L_0, β_0), тому $L_0 = N$, а $\beta_0 : N \to M$ продовжує β. Отже M є ін'єктивним. □

1.9. Мінори і теорема Моріти

s19

У цьоіу розділі ми встановимо критерій еквівалентності категорій модулів. Це — так звана *Теорема Моріти.*

morita ТЕОРЕМА 1.9.1. *Категорії модулів $\boldsymbol{A}$-Mod і $\boldsymbol{B}$-Mod еквівалентні тоді й лише тоді, коли існує проективний скінченнопороджений $\boldsymbol{A}$-модуль P такий, що $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} P \simeq \boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}$ і для деякого k існує епік $kP \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ для деякого k.*

Для доведення нам потрібні деякі додаткові відомості про *кодобутки.*

coprod ОЗНАЧЕННЯ 1.9.2. *Кодобутком* множини об'єктів $\{ M_i \mid i \in I \}$ у категорії $\mathscr{C}$ зветься об'єкт M, який представляє функтор $\prod_{i\in I} \mathscr{C}^{M_i}$.

Інакше кажучи, для кожного об'єкту $X \in \mathscr{C}$ існує ізоморфізм $\phi(X) : \mathscr{C}(M, X) \to \prod_{i\in I} \mathscr{C}(M_i, X)$, причому, якщо $\alpha : X \to Y$, а $\phi(f) = (f_i)_{i\in I}$, то $\phi(f\alpha) = (f_i\alpha)$. Зокрема, якщо $\phi(M)1_M = (\varepsilon_i)$, де $\varepsilon_i : M_i \to M$, то $\phi(X)(f) = (f\varepsilon_i)$. Очевидно, морфізми ε_i за цим правилом і визначають ізоморфізм $\mathscr{C}^M \simeq \prod_{i\in I} \mathscr{C}^{M_i}$.

Якщо такий об'єкт M існує, він визначений з точністю до ізоморфізму (наслідок з леми Йонеди, див. вправу)1.3.9). Тоді пишуть $M \simeq \coprod_{i\in I} M_i$.

Якщо всі модулі M_i ізоморфні фіксованому об'єкту N, кодобуток $\coprod_{i\in I} M_i$ позначають $N^{(I)}$ і звуть *костепенем* об'єкта N.

193 ПРИКЛАД 1.9.3. (1) У категорії множин Set кодобутком $\coprod_{i\in I} M_i$ є *об'єднання неперсічних множин.* Це означає, що ми маємо замінити кожну множину M_i на рівнопотужну M'_i (тобто ізоморфну M_i у категорії множин) так, щоб $M'_i \cap M'_j = \mathbf{0}$ при $i \neq j$, і покласти $M = \bigcup_{i\in I} M'_i$. Відображення ε_i — це біекції $M'_i \to M_i \subseteq M$.

(2) У категорії модулів $\boldsymbol{A}$-Mod кодобуток $\coprod_{i\in I} M_i$ — це пряма сума, тобто множина наборів $(x_i)_{i\in I}$, де $x_i \in M_i$, причому майже всі $x_i = 0$.

Очевидно, еквівалентість категорій завжди переводить кодобутки у кодобутки (тоді, коли вони існують). Для нас важливо, що цб властивіть має більший клас функторів, а саме, функтори, у яких є праві спряжені.

194 Лема 1.9.4. *Якщо (F,G) — спряжена пара функторів* $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$, *то функтор F переводить кодобутки у кодобутки.*

Доведення. Це випливає з ізоморфізмів функторів

$$\mathscr{B}(F\coprod_{i\in I} M_i, X) \simeq \mathscr{A}(\coprod_{i\in I} M_i, GX) \simeq \prod_{i\in I} \mathscr{A}(M_i, GX) \simeq \prod_{i\in I} \mathscr{B}(FM_i, X).$$

□

З формули спряженості (теорема 1.6.1 випливає

195 Наслідок 1.9.5. *Тензорний добуток переводить кодобутки у кодобутки.*

Якщо $M \simeq \coprod_{i\in I} M_i$, то при $X = M_j$ ми маємо бієкцію $\mathscr{C}(M, M_j) \to \prod_{i\in I} \mathscr{C}(M_i, M_j)$. Зокрема, існує морфізм $\pi_i : M \to M_j$, для якого $\pi_j\varepsilon_j = 1_{M_j}$, а $\pi_j\varepsilon_i = 0$ при $i \neq j$.

Якщо категорія $\mathscr{C}$ предадитивна і $M \simeq \coprod_{i\in I} M_i$, то визначене відображення $S(N) : \coprod_{i\in I} \mathscr{C}(N, M_i) \to \mathscr{C}(N, M)$, яке переводить набір (f_i) у $\sum_i \varepsilon_i f_i$ (це має сенс, бо майже всі $f_i = 0$). Воно ін'єктивне, бо $\pi_j \sum_i \varepsilon_i f_i = f_j$, але не завжди сюр'єктивне.

196 Приклад 1.9.6. Нехай $\mathscr{C} = \mathsf{Ab}$, N — група типу p^∞, $I = \mathbb{N}$ і всі $M_i = N$. Задамо гомоморфізм $f : N \to M = \coprod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ правилом $f(a) = (p^i a)_{i\in\mathbb{N}}$. Оскільки для кожного $a \in N$ існує k, для якого $p^k a = 0$, це визначення коректне. Але ясно, що $\operatorname{Im} f$ не належить ніякій підгрупі в M вигляду $\bigoplus_{i\in J} M_i$, де J — власна підмножина в $\mathbb{N}$, тому f не можна подати у вигляді $\sum_i \varepsilon_i f_i$.

Втім, є важливий випадок, коли $S(N)$ є бієкцією.

197 Лема 1.9.7. *Якщо N — скінченнопороджений $\boldsymbol{A}$-модуль, то для довільного набору $\boldsymbol{A}$-модулів M_i $(i \in I)$ відображення $S(N) : \coprod_{i\in I} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, M_i) \to \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, M)$, де $M = \coprod_{i\in I} M_i$ є бієкцією.*

Доведення. Треба довести, що $S(N)$ — сюр'єкція. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ — твірні N, $f : N \to M$ і $b_k = f(a_k)$. Оскільки b_k має лише скінченну кількість ненульових координат, існує скінченна підмножина $J_k \subseteq I$ така, що $f(a_k) = \sum_{i\in J_k} \varepsilon_i \pi_i f(a_k)$. Зокрема, $\pi_i f(a_k) = 0$, якщо $i \notin J_k$. Покладемо $J = \bigcup_{k=1}^m J_k$. Тоді $f(a_k) == \sum_{i\in J} \varepsilon_i \pi_i f(a_k)$ для всіх k, звідки $f = \sum_{i\in J} \varepsilon_i f_i$, де $f_i = \pi_i f$. □

Зауважимо, що скінченнопороджені модулі можна охарактеризувати категорно.

198 Лема 1.9.8. *$\boldsymbol{A}$-модуль N є скінченнопородженим тоді й лише тоді, коли для кожного епіка $f : M \twoheadrightarrow N$, де $M = \coprod_{i\in I} M_i$, існує скінченна*

підмножина $J \subseteq I$ така, що гомоморфізм $\tilde{f}$ такий, що

$$\tilde{f}\varepsilon_i = \begin{cases} f\varepsilon_i & \text{якщо } i \in J, \\ 0 & \text{якщо } i \notin J \end{cases}$$

також є епіком.

Доведення. Вправа. $\square$

199 Наслідок 1.9.9. *Еквівалентність категорій модулів переводить скінченнопороджені модулі у скінченнопороджені.*

Доведення необхідності у теоремі Моріти. Нехай

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[r, shift left, "F"] & \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

— пара квазіобернених функторів. Покладемо $P = G\boldsymbol{B}$. Оскільки $\boldsymbol{B}$ — проективний скінченнопороджений $\boldsymbol{B}$-модуль, P — проективний скінченнопороджений $\boldsymbol{A}$-модуль. Крім того, $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} P \simeq \operatorname{End}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}$. Нехай тепер $Q = FA$. Це — скінченнопороджений $\boldsymbol{B}$-модуль, тому для деякого k існує епік $f : k\boldsymbol{B} \twoheadrightarrow Q$. Застосувавши функтор G, одержимо епік $Gf : kP \twoheadrightarrow GF\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$. $\square$

Для доведення достатності розглянемо навіть більш загальну ситуацію.

Теорема 1.9.10 (Теорема про мінор). *Нехай P — скінченнопороджений проективний $\boldsymbol{A}$-модуль, $\boldsymbol{B} = (\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} P)^{\mathrm{op}}$ (тоді P стає $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем). Позначимо*

$$F = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P, \square) : \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod},$$
$$G = P \otimes_{\boldsymbol{B}} \square : \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod} \to \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod},$$

P-Mod — повна підкатегорія в категорії $\boldsymbol{A}$-Mod, яка складається з тих модулів M, для яких існує точна послідовність $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, де P_0 і P_1 — костепені P.

(1) $FG \simeq \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}}$.
(2) $\operatorname{Im} G = P\text{-}\mathsf{Mod}$.
(3) $GF_P \simeq \mathbf{1}_{P\text{-}\mathsf{Mod}}$, *де F_P — обмеження F на P-Mod.*

Отже, маємо еквівалентність категорій $\boldsymbol{B}$-$\mathsf{Mod} \simeq P$-Mod.

У цій ситуації кільце $\boldsymbol{B}$ зветься *мінором* кільця $\boldsymbol{A}$. Теорема каже, що категорія модулів над мінором кільця $\boldsymbol{A}$ вкладається як повна підкатегорія у категорію $\boldsymbol{A}$-модулів.

Доведення. (1) Задамо гомоморфізм $\Phi(N) : N \to FG(N) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P, P \otimes_{\boldsymbol{B}} N)$ правилом $\Phi(N)(x)(p) = p \otimes x$, де $x \in N$, $p \in P$ (отже $\Phi(N)(x) \in \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P, P \otimes_{\boldsymbol{B}} N)$). Легко бачити, що Φ дійсно є морфізмом функторів $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}} \to FG$. Якщо $N = \boldsymbol{B}$, то $P \otimes_{\boldsymbol{B}} N \simeq P$: елемент $p \otimes b$ ототожнюється з pb. Отже, $\Phi(\boldsymbol{B})(b)(p) = pb$. Оскільки дія $\boldsymbol{B}$ на P виникає з ототожнення $\boldsymbol{B}$ з $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P,P)^{\mathrm{op}}$, $\Phi(\boldsymbol{B})$ — ізоморфізм. Обидва функтори G і F переводять кодобутки у кодобутки (наслідок 1.9.5 і лема 1.9.7). Тому $\Phi(C)$ є ізоморфізмом для кожного вільного $\boldsymbol{B}$-модуля C (тобто костепеня модуля $\boldsymbol{B}$). Для кожного $\boldsymbol{B}$-модуля N існує точна послідовність $S_1 \xrightarrow{\alpha} S_0 \xrightarrow{\beta} N \to 0$, де S_0, S_1 — вільні модулі. Функтор F є точним справа, а функтор G є точним, тому функтори FG і GF є точними справа. Застосувавши FG до цієї точної послідовності, одержимо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi(S_1)"'] & S_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Phi(S_0)"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\Phi(N)"'] & 0 \\
FGS_1 \arrow[r, "FG\alpha"] & FGS_0 \arrow[r, "FG\beta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

З того, що $\Phi(S_1)$ і $\Phi(S_0)$ — ізоморфізми, випливає, що й $\Phi(N)$ також ізоморфізм.

(2) Точна послідовність $S_1 \to S_0 \to N \to 0$, де S_0 і S_1 — костепені $\boldsymbol{B}$, дає точну послідовність $GS_1 \to GS_0 \to GN \to 0$, причому FS_1 і FS_0 — костепені P.

(3) Це доведення цілком аналогічне доведенню твердження (1). Визначимо гомоморфізм $\mathrm{ev}(M) : GFM = P \otimes_{\boldsymbol{B}} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P,M) \to M$ правилом $\mathrm{ev}(M)(p \otimes f) = f(p)$, де $p \in P$, $f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P,M)$ («гомоморфізм обчислення»). Якщо $M = P$, то $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P,P) = \boldsymbol{B}$ як $\boldsymbol{B}$-модуль і $\mathrm{ev}(P) : P \otimes_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B} \to P$ — ізоморфізм. Тому $\mathrm{ev}(M)$ є ізоморфізмом, якщо M — костепінь P. Якщо ж $M \in P\text{-}\mathsf{Mod}$, точна послідовність $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \to 0$, де P_0, P_1 — костепені P дають комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
GFP_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{ev}(P_1)"'] & GFP_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{ev}(P_0)"'] & GFM \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ev}(M)"'] & 0 \\
P_1 \arrow[r, "\alpha"] & P_0 \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Оскільки $\mathrm{ev}(P_1)$ і $\mathrm{ev}(P_0)$ — ізоморфізми, $\mathrm{ev}(M)$ також ізоморфізм. □

Доведення достатності у теоремі Моріті. Епік $kP \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ разом з епіком $S \twoheadrightarrow M$, де S — вільний модуль, дає епік $\alpha : P_0 \twoheadrightarrow M$, де P_0 — костепінь P. Застосувавши те саме до $\mathrm{Ker}\,\alpha$, отримаємо точну послідовність $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, де P_1 — також костепінь P. Отже, $P\text{-}\mathsf{Mod} = \boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod}$ і залишається застосувати теорему про мінор. □

s10 1.10. Локальні категорії й теорема Крулля–Шмідта–Адзумая

У цьому розділі ми доведемо однозначність розкладу у пряму суму нерозкладних об'єктів для важливого класу категорій, який включає, зокрема, категорії скінченновимірних модулів над алгебрами над полем.

101 Означення 1.10.1. (1) Кільце $\boldsymbol{A}$ зветься *локальним*, якщо в ньому є найбільший власний лівий ідеал, тобто такий власний лівий ідеал $\mathfrak{m}$, що всі власні ліві ідеали $\boldsymbol{A}$ містяться в $\mathfrak{m}$.

(2) Об'єкт A предадитивної категорії $\mathscr{A}$ зветься *локальним*, якщо таким є його кільце ендоморфізмів $\mathscr{A}(A, A)$.

(3) Адитивна категорія $\mathscr{A}$ зветься *локальною*, якщо кожен її об'єкт є прямою сумою локальних об'єктів.

102 Твердження 1.10.2. *Нехай $\boldsymbol{A}$ — локальне кільце.*

(1) *$\boldsymbol{A}$ не містить ідемпотентів, крім 0 та 1.*

(2) *$\mathfrak{m}$ є множиною всіх необертовних елементів кільця $\boldsymbol{A}$.*

(3) *$\mathfrak{m}$ є (двостороннім) ідеалом і $\boldsymbol{A}/\mathfrak{m}$ є полем.*

(4) *$\mathfrak{m}$ — власний правий ідеал, який містить всі власні праві ідеали*

Зокрема, кільце $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ теж локальне.

Доведення. (1) Нехай $e^2 = e$, тоді $e(1-e) = (1-e)e = 0$. Якщо $e \notin \mathfrak{m}$, то $\boldsymbol{A}e \nsubseteq \mathfrak{m}$, тому $\boldsymbol{A}e = \boldsymbol{A}$. Отже, існує $a \in \boldsymbol{A}$, для якого $ae = 1$, звідки $1 - e = ae(1-e) = 0$ і $e = 1$. Якщо ж $e \in \mathfrak{m}$, то $1 - e \notin \mathfrak{m}$, звідки так само випливає, що $e = 0$.

(2) Як власний лівий ідеал, $\mathfrak{m}$ не містить обертовних елементів. Навпаки, якщо $x \notin \mathfrak{m}$, то, як вище, існує a, для якого $ax = 1$. Тоді $(xa)^2 = xa$ і, оскільки $xa \neq 0$, $xa = 1$, тобто $a = x^{-1}$.

(3) Для довільного $a \in \boldsymbol{A}$ $\mathfrak{m}a$ — лівий ідеал. Якщо $\mathfrak{m}a \nsubseteq \mathfrak{m}$, то $a \notin \mathfrak{m}$, отже a обертовний. Крім того, $\mathfrak{m}a = \boldsymbol{A}$ і знайдеться $b \in \mathfrak{m}$, для якого $ba = 1$. Тоді $b = a^{-1}$ — обертовний елемент, що неможливо.

(4) безпосередньо випливає з (2) і (3). □

Надалі ми фіксуємо предадитивну категорію $\mathscr{A}$ і позначаємо $\operatorname{End} A = \mathscr{A}(A, A)$, де $A \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$.

103 Означення 1.10.3. (1) Ідемпотент $e \in \operatorname{End} A$ зветься *розщеплюваним*, якщо існують морфізми $A' \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A$ такі,pd що $pi = 1_{A'}$ і $ip = e$.

(2) Об'єкт A зветься *розщеплюваним*, якщо кожен ідемпотент з $\operatorname{End} A$ є розщеплюваним.

(3) Адитивна категорія, в якій кожен ідемпотент є розщеплюваним, зветься *цілком адитивною*.

Легко бачити (перевірте це), що якщо обидва ідемпотенти e і $1 - e$ є розщеплюваними: $e = ip$, $1 - e = i'p'$, де $A'' \underset{p'}{\overset{i'}{\rightleftarrows}} A$, то $A' \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A \underset{i'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} A''$ — діаграма прямої суми.

104 Лема 1.10.4. *Нехай A — локальний об'єкт.*

(1) *Для кожного ідемпотента* $e \in \mathrm{End}(A \oplus B)$ — *ідемпотент. Існує автоморфізм* $\gamma \in \mathrm{Aut}(A \oplus B)$ *такий, що* $\gamma e \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$, *де* $e_1 \in \{ 0, 1_A \}$.

(2) *Якщо об'єкт* B *є розщеплюваним, таким є й* $A \oplus B$.

Доведення. (1) Нехай $e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. З $e^2 = e$ випливає, що

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= a, \\ ab + bd &= b, \\ ca + dc &= c, \\ d^2 + cb &= d. \end{aligned}$$

Нехай $\mathfrak{m}$ — максимальний ідеал в $\mathrm{End}\, A$. Якщо $a \notin \mathfrak{m}$, то a обертовний. Покладемо $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma e \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1_A & b \\ 0 & u \end{pmatrix} = \tilde{e}$ для деякого u. (Ми скористалися тим, що $a + bca^{-1} = 1$, $bc = a - a^2$ і $dc = c - ca$). Оскільки $\tilde{e}$ теж ідемпотент, $u^2 - u$ і $bu = 0$. Покладемо $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma_2 \tilde{e} \gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ і можна покласти $\gamma = \gamma_2\gamma_1$.

Якщо $a \in \mathfrak{m}$, то $1 - a \notin \mathfrak{m}$, а тоді, як ми показали, існує автоморфізм γ, для якого $\gamma(1-e)\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$. Звідси $\gamma e \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-u \end{pmatrix}$.

(2) Очевидно, якщо $\gamma^{-1} e \gamma = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$, де $e_1 \in \{ 0, 1_A \}$, і e_2 розщерлюваний, то й e розщеплюваний. ☐

105 Лема 1.10.5. *Нехай* A — *локальний об'єкт,* $B \simeq B_1 \oplus B_2$ *і* $A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B$ — *такі морфізми, що* $pi = 1_A$. *Існує автоморфізм* $\gamma \in \mathrm{Aut}\, B$ *такий, що, відносно цього розкладу, або* $\gamma i = \begin{pmatrix} i' \\ 0 \end{pmatrix}$ *і* $p\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} p' & 0 \end{pmatrix}$, *або* $\gamma i = \begin{pmatrix} 0 \\ i' \end{pmatrix}$ *і* $p\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & p' \end{pmatrix}$. *Зокрема, якщо об'єкти* B_1 *і* B_2 *розщеплювані, то* A *є прямим доданком* B_1 *або* B_2.

Доведення. Нехай $i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$. Тоді $p_1 i_1 + p_1 i_2 = 1_A$, звідки випливає, що або $p_1 i_1$, або $p_2 i_2$ — обертовний елемент в $EndA$. Припустимо, що обертовним є другий доданок: $p_2 i_2 \alpha = \alpha p_2 i_2 = 1$ для деякого α. Покладемо $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i_1 \alpha p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma_1 i = \begin{pmatrix} 0 \\ i_2 \end{pmatrix}$, $p\gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & \alpha p_2 \end{pmatrix}$. Покладемо тепер $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i_2 p_1 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma_2 \gamma_1 i = \begin{pmatrix} i_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha p_2 \end{pmatrix}$. Аналогічно розглядається випадок, коли обертовним є перший доданок. ☐

106 Наслідок 1.10.6. *Якщо* $A \simeq \bigoplus_{i=1}^n A_i$, *де всі об'єкти* A_i *локальні, то* A — *розщеплюваний.*

Доведення. Скористаємося індукцією за n. Локальний об'єкт є, очевидно, розщеплюваним, що дає базу індукції ($n = 1$). Припустимо, що твердження вірне для випадку $n - 1$ об'єкту. Тоді $B = \bigoplus_{i=2}^n A_i$ — розщеплюваний. За лемою 1.10.4, $A \simeq A_1 \oplus B$ також розщеплюваний. ☐

107 Наслідок 1.10.7. *Адитивна локальна категорія є цілком адитивною.*

108 Лема 1.10.8. *Якщо A — локальний об'єкт і $A\oplus B \simeq A\oplus C$, де об'єкт C розщеплюваний, то $B \simeq C$.*[1]

Доведення. Нехай $\alpha : A \oplus B \xrightarrow{\sim} A \oplus C$, $A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A \oplus B$ — частина діаграми прямої суми для $A \oplus B$. Тоді $(p\alpha^{-1})(\alpha i) = 1_A$. За лемою 1.10.5, існує автоморфізм γ об'єкта $A \oplus C$ такий, що або $\gamma\alpha i = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$, $p\alpha^{-1}\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \end{pmatrix}$, або $\gamma\alpha i = \begin{pmatrix} 0 \\ i' \end{pmatrix}$, $p\alpha^{-1}\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & p' \end{pmatrix}$, де $p'i' = 1_A$. У першому випадку матриця ізоморфізму $\gamma\alpha$ має вигляд $\begin{pmatrix} 1_A & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ і, оскільки вона обертовна, морфізм $b : B \to C$ є ізоморфізмом.

У другому випадку, оскільки C розщеплюваний, існую розклад $C \simeq A \oplus C'$, відносно якого $i' = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$, $p' = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \end{pmatrix}$. Відносно розкладу $A \oplus A \oplus C'$ ізоморфізм $\gamma\alpha$ має матрицю $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1_A & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Оскільки вона обертовна, матриця $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, яка задає морфізм $B \to A \oplus C' \simeq C$ також обертовна. □

KSA Теорема 1.10.9 (Теорема Крулля–Шмідта–Адзумая). *Якщо $A \simeq \bigoplus_{i=1}^n A_i \simeq \bigoplus_{j=1}^m B_j$, де всі об'єкти A_i та B_j локальні, то $n = m$ й існує перестановка σ така, що $A_i \simeq B_{\sigma i}$ для всіх $i = 1, \dots, n$.*

Доведення. Скорістаємося індукцією за n. Якщо $n = 1$, то об'єкт $A \simeq A_1$ локальний, тож нерозкладний, звідки $m = 1$ і $A_1 \simeq B_1$. Припустимо, що твердження вірне для $n - 1$. Оскільки локальний об'єкт A_1 є прямим доданком $\bigoplus_{j=1}^m B_i$, з леми 1.10.5 випливає, що A_1 — прямий доданок якогось B_j, тобто, оскільки B_j також локальний, $A_1 \simeq B_j$. Звичайно, можна вважати, що $j = 1$. Тоді $A_1 \oplus A' \simeq A_1 \oplus B'$, де $A' = \bigoplus_{i=2}^n A_i$, $B' = \bigoplus_{j=2}^m B_j$. За лемою 1.10.8, $A' \simeq B'$. Звідси, за індуктивним припущенням, $n - 1 = m - 1$, тобто $n = m$, й існує перестановка σ така, що $A_i \simeq B_{\sigma i}$ при $i > 1$. □

1.11. Модулі скінченної довжини

s1a

Ми розглянемо один клас модулів, до яких застосовна теорема Крулля–Шмідта–Адзумая.

1a1 Означення 1.11.1.

(1) Модуль M зветься *артіновим*, якщо в ньому немає нескінченних спадних ланцюгів підмодулів.
(2) Модуль M зветься *нетеровим*, якщо в ньому немає нескінченних зростаючих ланцюгів підмодулів.
(3) Модуль, який одночасно є артіновим і нетеровим зветься *модулем скінченної довжини.*

Інакше кажучи, модуль M є модулем скінченної довжини, якщо в ньому немає нескінченних ланцюгів підмодулів.

Кільце, яке є артіновим (нетеровим) лівим (правим) модулем над собою, зветься артіновим (нетеровим) зліва (справа) кільцем. Якщо кільце

[1] Насправді кожну предадитивну категорію можна занурити як повну підкатегорію у таку, де всі ідемпотенти є розщеплюваними. Тому ця лема є вірною і без обмежень на об'єкт C.

є артіновим (нетеровим) і справа, і зліва, воно зветься артіновим (нетеровим) кільцем.

Очевидно, підмодулі і фактормодулі артінова (нетерова) модуля знову є артіновими (нетеровими).

1a2 Приклад 1.11.2. (1) Група цілих чисел є нетеровим $\mathbb{Z}$-модулем. Це випливає з того, що кожен ідеал в $\mathbb{Z}$ є головним, $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ тоді й лише тоді, коли $m \mid n$ і в $\mathbb{N}$ немає нескінченних спадних ланцюгів. Цей модуль не артінів: $\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset 8\mathbb{Z} \subset \dots$ — нескінченний спадний ланцюг підмодулів.

(2) У групі типу p^∞ (група всіх коренів з одиниці степенів p^k, де p — первинне число) будь-яка власна підгрупа є скінченною. Звідси одразу випливає, що це — артінів $\mathbb{Z}$-модуль. Цей модуль не нетерів: якщо позначити $P_k = \left\{ a \mid p^k a = 0 \right\}$, то $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ — нескінченний зростаючий ланцюг підмодулів.

(3) Якщо $\boldsymbol{A}$ — алгебра над полем $\Bbbk$, а модуль M є скінченновимірним над $\Bbbk$, він є модулем скінченної довжини.

(4) (Вправа!) Розглянемо кільце $\boldsymbol{A}$ матриць вигляду $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{Q}$.

(a) Доведіть, що кожен лівий ідеал в $\boldsymbol{A}$, крім $\boldsymbol{A}$ і $\{0\}$ — це один з наступних:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; b \in \mathbb{R},\, c \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Отже $\boldsymbol{A}$ є артіновим зліва.

(b) Перевірте, що, якщо $V \subseteq \mathbb{R}$ є підпростором у $\mathbb{R}$ як у векторному просторі над $\mathbb{Q}$, то множина

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a \in V \right\},$$

є правим ідеалом в $\boldsymbol{A}$. Виведіть звідси, що $\boldsymbol{A}$ не є ані артіновим, ані нетеоровим справа.

1a3 Лема 1.11.3 (Лема Фіттінга). *Нехай $f \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M$, де M — $\boldsymbol{A}$-модуль скінченної довжини. M розкладається у пряму суму підмодулів $M = M_0 \oplus M_1$ таких, що $f(M_i) \subseteq M_i$ $(i = 0, 1)$, обмеження $f|_{M_0}$ є нільпотентним, а обмеження $f|_{M_1}$ є обертовним.*

Доведення. Позначимо $K_n = \operatorname{Ker} f^n$, $L_n = \operatorname{Im} f^n$. Очевидно, $K_n \subseteq K_{n+1}$, $L_n \supseteq L_{n+1}$, $f(K_{n+1} \subseteq K_n$, $f(L_n) = L_{n+1}$. Оскільки M — модуль скінченної довжини, існує такий номер n, що $K_n = K_m$ і $L_n = L_m$ для всіх $m \geqslant n$. Тоді $f(K_n) \subseteq K_n$, $f(L_n) = L_n$. Доведемо, що $M = K_n \oplus L_n$.

Якщо $x \in K_n \cap L_n$, то $f_n x = 0$ і $x = f^n y$ для деякого y. Тоді $f^{2n} y = 0$, тобто $y \in K_{2n} = K_n$, отже й $x = f^n y = 0$. З іншого боку, оскільки $L_n = L_{2n}$, для кожного $x \in M$ знайдеться $y \in M$,для якого $f^n x = f^{2n} y$. Тоді $f^n(x - f^n y) = 0$ і $x = (x - f^n y) + f^n y$, де $x - f^n y \in K_n$, $f^n y \in L_n$. Оскільки $\operatorname{Ker} f \subseteq K_n$, $L_n \cap \operatorname{Ker} f = 0$. Отже $f|_{L_n}$ — монік і епік, тобто ізоморфізм. За означенням, $f^n(K_n) = 0$, тобто обмеження $f|_{K_n}$ є нільпотентним і можна покласти $M_0 = K_n$, $M_1 = L_n$. $\square$

1a4 Наслідок 1.11.4. (1) *Якщо M — нерозкладний $\boldsymbol{A}$-модуль скінченної довжини, то його кільце ендоморфізмів є локальним.*

(2) *Кожен модуль скінченної довжини однозначно розкладається у пряму суму локальних модулів (з точністю до ізоморфізму й порядку доданків).*

Доведення. (1) Нехай $\boldsymbol{E} = \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M$. За лемою Фіттінга, кожен ендоморфізм $a \in \boldsymbol{E}$ є або обертовним, або нільпотентним. Покажемо, що якщо a нільпотентний, то такими є ab і ba для кожного b. Дійсно, якби ab був обертовним, то a був би обертовним справа: $ax = 1$ для деякого x. Тоді $(xa)^n \neq 0$ для всіх n, отже xa обертовний і a обертовний зліва, а тому обертовний. Покажемо тепер, що, якщо a і b нільпотентні, то й $a + b$ нільпотентні. Дійсно, інакше $a + b$ обертовний й існує x такий, що $ax + bx = 1$. Але ax нільпотентний: $(ax)^n = 0$, а тоді $bx = 1 - ax$ обертовний: оберненим є $1 + ax + \cdots + (ax)^{n-1}$. Це неможливо. Отже, всі необертовні (тобто нільпотентні) елементи утворюють ідеал $\mathfrak{m}$. Очевидно, тоді $\mathfrak{m}$ містить всі власні ліві (й праві) ідеали, тобто $\boldsymbol{E}$ є локальним.[2]

(2) випливає з (1) і теореми Крулля–Шмідта–Адзумая. $\square$

[2] У перебігу цього доведення ми фактично встановили, що якщо кожен елемент кільця є або обертовним, або нільпотентним, то це кільце є локальним.

Розділ 2

Зображення сагайдаків

ch2

2.1. Сагайдаки та їх зображення

s21

211 Означення 2.1.1. Нехай $\Gamma = (\operatorname{Ver}\Gamma, \operatorname{Arr}\Gamma, \iota_0, \iota_1)$ — деякий сагайдак, $\operatorname{Cat}\Gamma$ — породжена ним вільна категорія, (приклад 1.1.5). *Зображенням сагайдака* Γ *над полем* $\mathbb{k}$ зветься функтор $V : \operatorname{Cat}\Gamma \to \mathsf{Vec}\,\mathbb{k}$, де $\mathsf{Vec}\,\mathbb{k}$ — категорія векторних просторів над полем $\mathbb{k}$. Очевидно, щоб задати цей функтор, досить задати для кожної вершини $i \in \operatorname{Ver}\Gamma$ векторний простір $V(i)$, а для кожної стрілки $\alpha : I \to j$ — лінійне відображення $V(\alpha) : V(i) \to V(j)$. Категорія таких зображень позначається $\mathsf{Rep}(\Gamma, \mathbb{k})$, або $\mathsf{Rep}(\Gamma)$, якщо поле $\mathbb{k}$ фіксоване.

212 Зауваження 2.1.2.

(1) Оскільки категорія $\mathsf{Vec}\,\mathbb{k}$ є $\mathbb{k}$-категорією, категорія $\mathsf{Rep}(\Gamma, \mathbb{k})$ також є $\mathbb{k}$-категорією.

(2) Якщо V' — інше зображення, $\Phi : \operatorname{Ver}\Gamma \to \operatorname{Mor}(\mathsf{Vec}\,\mathbb{k})$ — таке відображення, що $\Phi(i) : V(i) \to V'(i)$, то, щоб встановити, що Φ є морфізмом зображень, достатньо перевірити, що $\Phi(j)V(\alpha) = V'(\alpha)\Phi(i)$ для кожної стрілки $\alpha : i \to j$.

Надалі ми завжди вважатимемо, що сагайдак Γ є *скінченним*, тобто обидві множини $\operatorname{Ver}\Gamma$ і $\operatorname{Arr}\Gamma$ скінченні. Ми будемо вважати, що $\operatorname{Ver}\Gamma$

213 Означення 2.1.3. Зображення V скінченного сагайдака Γ зветься *скінченновимірним*, якщо всі простори $V(i)$ є скінченновимірними. У цьому випадку вектор $\mathbf{dim}\,V = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, де $d_i = \dim V(i)$ зветься *розмірністю* зображення V.

214 Означення 2.1.4. Кажуть, що сагайдак Γ є *зображувально скінченним*, якщо він має лише скінченну кількість неізоморфних нерозкладних зображень.[1]

Обравши базу в кожному з просторів $V(i)$, ми можемо ототожнити відображення $V(\alpha)$ його матрицею. Якщо $\alpha : i \to j$, то це матриця розміру $d_j \times d_i$. При цьому зображення V і V' ізоморфні тоді й лише тоді, коли $\mathbf{dim}\,V = \mathbf{dim}\,V'$ і існують невироджені матриці $\phi(i) \in \operatorname{GL}(d_i, \mathbb{k})$ такі, що

e211
$$V'(\alpha) = \phi(j)^{-1}V(\alpha)\phi(i) \quad \text{для кожного } \alpha : i \to j. \tag{2.1.1}$$

[1] Звичайно, тут треба було додати «над полем $\mathbb{k}$», але ми побачимо, що це не залежить від поля.

Для кожного вектора $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$ позначимо

$$\mathsf{Rep}(\mathbf{d}, \Gamma) = \prod_{\substack{\alpha \in \operatorname{Arr} \Gamma \\ \alpha : i \to j}} \operatorname{Mat}(d_j \times d_i),$$

$$\mathsf{G}(\mathbf{d}) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{GL}(d_i, \Bbbk).$$

Група $\mathsf{G}(\mathbf{d})$ діє на множині $\mathsf{Rep}(\mathbf{d}, \Gamma)$ за правилом (2.1.1) і орбіти цієї дії — це класи ізоморфізму зображень сагайдака Γ розмірності $\mathbf{d}$.

Titsform

Означення 2.1.5. Позначимо

$$\mathrm{Q}_\Gamma^+(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\mathrm{Q}_\Gamma^-(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha : i \to j} x_i x_j,$$

$$\mathrm{Q}_\Gamma = \mathrm{Q}_\Gamma^+ - \mathrm{Q}_\Gamma^-.$$

Квадратична форма Q зветься *формою Тітса* сагайдака Γ. Зауважимо, що форма Тітса не залежить від напрямку стрілок у сагайдаку Γ, тобто є насправді функцією підлеглого неорієнтованого графа.

Множина $\mathsf{Rep}(\mathbf{d}, \Gamma)$ — це векторний простір над полем $\Bbbk$ розмірності $\mathrm{Q}_\Gamma^+(\mathbf{d})$. Група $\mathsf{G}(\mathbf{d})$ — це *алгебрична група* розмірності $\mathrm{Q}_\Gamma^+(\mathbf{d})$, причому її дія на просторі $\mathsf{Rep}(\mathbf{d}, \Gamma)$ є *раціональною*, тобто координати зображення $\phi \cdot V$ є раціональними функціями від координат зображення V і набору матриць $\phi \in \mathsf{G}(\mathbf{d})$. Зауважимо, що набір матриць ϕ такий, що $\phi(i)$ для кожного i є скалярною матрицею λI_{d_i} (з тим самим λ), залишає будь-яке зображення незмінним. Тому насправді на просторі $\mathsf{Rep}(\mathbf{d}, \Gamma)$ діє факторгрупа $\mathsf{G}(\mathbf{d})/\Bbbk^\times$, де $\Bbbk^\times$ — мультиплікативна група поля $\Bbbk$, вкладена у $\mathsf{G}(\mathbf{d})$, як описано вище. Розмірність цієї групи дорівнює $\mathrm{Q}_\Gamma^+(\mathbf{d}) - 1$. З загальних результатів про розмірності алгебричних многовидів **[2]** випливає, що, якщо поле $\Bbbk$ нескінченне, а сагайдак Γ має скінченну кількість класів ізоморфізму зображень розмірності $\mathbf{d}$, то $\mathrm{Q}_\Gamma^+(\mathbf{d}) > \mathrm{Q}_\Gamma^-(\mathbf{d})$, тобто $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) > 0$. Якщо сагайдак Γ зображувально скінченний, звідси випливає, що $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) > 0$ для кожного ненульового вектора $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$. Але з вигляду форми Тітса видно, що $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{x}) \leqslant \mathrm{Q}_\Gamma(|\mathbf{x}|)$. Тому $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{x}) > 0$ для довільного $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$, а тому й для довільного $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$. Оскільки коефіцієнти форми Q_Γ цілі, це означає, що ця форма є *додатно визначеною*: $\mathrm{Q}_\Gamma > 0$. Отже, додатна визначеність форми Тітса є необхідною умовою того, щоб сагайдак був зображувально скінченним. Насправді, ця умова є й достатньою.

gab

Теорема 2.1.6 (Теорема Ґабрієля). *Сагайдак Γ є зображувально скінченним тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Q}_\Gamma > 0$. У цьому випадку:*

(1) *Вектор $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$ є розмірністю нерозкладного зображення тоді й лише тоді, коли $\mathsf{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$.*

(2) *Якщо V і V' — нерозкладні зображення і* $\mathbf{dim}\, V = \mathbf{dim}\, V'$*, то* $V \simeq V'$.

Отже, у цьому випадку існує взаємно однозначна відповідність між класами ізоморфізму нерозкладних зображень і такими векторами $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$*, що* $\mathsf{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$.

Цілочисельні вектори $\mathbf{d}$, для яких $\mathsf{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$ звуться *коренями форми* Q_Γ. Якщо всі координати $\mathbf{d}$ невід'ємні, кажуть, що це — *додатний корінь*.

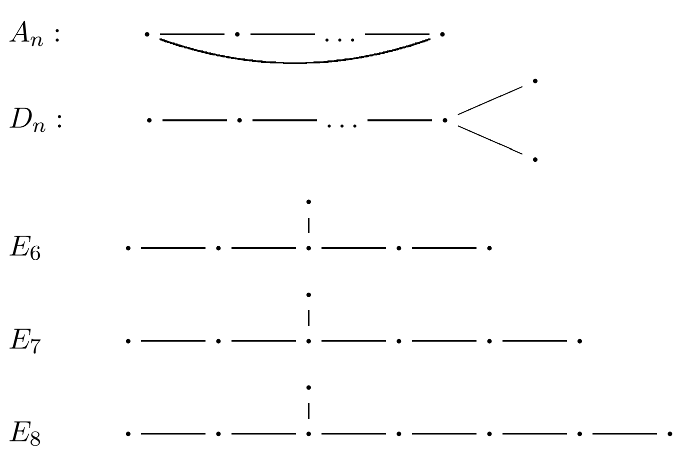
Доведення, яке ми дамо у наступних підрозділах, було запропоновано Бернштейном, Ґельфандом і Пономорьовим у роботі [**1**]. Воно ґрунтується на понятті *віддзеркалень* у просторі з квадратичною формою й *категоріфікації* віддзеркалень, тобто їх реалізації як функторів на категорії зображень сагайдака.

214 Зауваження 2.1.7. З теореми Ґабріеля випливають такі наслідки.

(1) Зображувальна скінченність сагайдака не залежить ані від поля, над яким розглядаються зображення, ані від *орієнтації* (напрямку стрілок), її повністю визначає підлеглий неорієнтований граф.

(2) Для зображувально скінченного сагайдака розмірності нерозкладних зображент також не залежать ані від поля, над яким розглядаються зображення, ані від *орієнтації*.

Усі сагайдаки з додатно визначеною формою Тітса відомі. У зв'язному випадку відповідні неорієнтовані графи — це так звані *схеми Динкіна*:



(у перших двох випадках n вершин).

2.2. Віддзеркалення

s22

221 Означення 2.2.1. (1) Нехай $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симетрична білінійна форма у дійсному векторному просторі $\mathbf{E}$, $\mathsf{Q}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — асоційована квадратична форма, $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ — такий вектор, що $\mathsf{Q}(\mathbf{v}) \neq 0$. *Віддзеркаленням* $\sigma_{\mathbf{v}}$ відносно цього вектора зветься лінійне відображення

$$\sigma_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}\mathbf{v}.$$

Прості обчислення показують, що віддзеркалення зберігає дану білінійну форму і є *інволюцією*, тобто $\sigma_{\mathbf{v}}^2 = 1_{\mathbf{E}}$ (перевірте це). Очевидно також, що $\sigma_{\mathbf{v}} = \sigma_{\lambda\mathbf{v}}$ для довільного ненульового $\lambda \in \mathbb{R}$. З геометричної точки зору, перетворення $\sigma_{\mathbf{v}}$ — це симетрія відносно гіперплощини, ортогональної до $\mathbf{v}$.

(2) Нехай $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_\Gamma$ — форма Тітса сагайдака Γ, який не має петель. Відповідна симетрична білінійна форма у просторі $\mathbb{R}^n$ має вигляд

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{\alpha: i \to j} (x_i y_j + x_j y_i).$$

Позначимо $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на i-му місці). Оскільки $\mathsf{Q}(\mathbf{e}_i)$=1, визначено віддзеркалення $\sigma_i = \sigma_{\mathbf{e}_i}$.

(3) Підгрупа у повній лінійній групі, породжена віддзеркаленнями σ_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), зветься *групою Вайля* форми Q_Γ або сагайдака Γ і позначається $W(\Gamma)$.

(4) Відображення $C = \sigma_n \ldots \sigma_2 \sigma_1$ зветься *перетворенням Кокстера.* Зауважимо, що воно залежить від нцумерації вершин сагайдака.

За означенням, віддзеркалення σ_i може змінити лише i-ту координату вектора $\mathbf{x}$. Зауважимо, що $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = x_i - \frac{1}{2}\sum_{\alpha: i - j} x_j$, де $\alpha : i - j$ означає, що або $\alpha : i \to j$,або $\alpha : j \to i$. Отже, i-та координата вектора $\sigma_i(\mathbf{x})$ дорівнює

e221
$$x_i' = x_i - 2\big(x_i - \frac{1}{2}\sum_{\alpha: i - j} x_j\big) = \sum_{\alpha: i - j} x_j - x_i. \tag{2.2.1}$$

Зауважимо також, що $\sigma_i \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i$.

Надалі ми позначаємо $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_\Gamma$.

222 Лема 2.2.2. *Нехай* $\mathbf{x}$ — *такий вектор, що* $\mathsf{Q}(\mathbf{v}) \neq 0$.

(1) *Існує номер і такий, що* $\sigma_i \mathbf{x} \neq \mathbf{x}$.

(2) $C\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$.

Доведення. (1) Якщо $\sigma_i \mathbf{x} = \mathbf{x}$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \neq 0$. Але $\mathsf{Q}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \neq 0$, тому $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \neq 0$ для якогось i.

(2) Оскільки віддзеркалення σ_i може змінити лише i-ту координату вектора $\mathbf{x}$, то $C\mathbf{x} = \mathbf{x}$ тоді й лише тоді, коли $\sigma_i\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всіх i, що неможливо. □

Припустимо тепер, що $\mathsf{Q} > 0$. Позначимо через Δ множину всіх коренів форми Q, а через Δ_+ множину її додатних коренів. Ми дамо деякий опис цієї множини й спосіб її побудови.

223 Твердження 2.2.3. *Якщо $\mathsf{Q} > 0$, то множина коренів Δ і група Вайля $W(\Gamma)$ скінченні.*

Доведення. Оскільки $\Delta \subset \mathbb{Z}^n$, це діскретна підмножина в $\mathbb{R}^n$. З іншого боку, форма Q перетворює $\mathbb{R}^n$ на евклідів простір. Тому множина $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{Q}(\mathbf{x}) = 1 \,\}$ (одинична сфера) є компактною, отже її дискретна підмножина Δ є скінченною.

Якщо $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$, формула (2.2.1) показує, що й $\sigma_i\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$, отже $w\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ для всіх $w \in W(\Gamma)$. Тому якщо $\mathbf{x}$ — корінь Q, то й $w\mathbf{x}$ — теж корінь. Отже, для векторів $w\mathbf{e}_i$ є лише скінченна кількість можливостей, а тому й для w є лише скінченна кількість можливостей. □

224 Лема 2.2.4. *Якщо $\mathsf{Q} > 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}_i$ — корінь, $\mathbf{x}' = \sigma_i(\mathbf{x})$, то $|x_i - x_i'| \leqslant 1$.*

Доведення. При фіксованих значеннях x_j для всіх $j \neq i$ форма $\mathsf{Q}(\mathbf{x})$ перетворюється на квадратичний многочлен $q(x_i)$ від x_i зі старшим коефіцієнтом 1. Припустимо, що $|x_i - x_i'| > 1$. Тоді існує ціле число y таке, що $x_i < y < x_i'$ або $x_i' < y < x_i$. Розглянемо вектор $\mathbf{y}$, у якого $y_j = x_j$ при $j \neq i$, а $y_i = y$. Оскільки $q(x_i) = q(x_i') = 1$, $\mathsf{Q}(\mathbf{y}) = q(y) < 1$ і ціле. Оскільки $\mathsf{Q} > 0$, $\mathbf{y} = 0$, а тоді $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. □

225 Наслідок 2.2.5. *Якщо $\mathsf{Q} > 0$ і $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}_i$ — додатний корінь, то й $\sigma_i\mathbf{e}_i$ — додатний корінь.*

Доведення. З формули (2.2.1) видно, що якщо $x_i = 0$, то $x_i' \geqslant 0$. Якщо ж $x_i \geqslant 1$, то з леми 2.2.4 випливає, що $x_i' \geqslant 0$. □

226 Наслідок 2.2.6. *Якщо $\mathsf{Q} > 0$ і $\mathbf{x}$ — додатний корінь, то існує таке $k > 0$, що корінь $C^k\mathbf{x}$ вже не є додатним.*

Доведення. Оскільки група Вайля скінченна, $C^r = 1_{\mathbb{R}^n}$ для деякого $r > 0$. Покладемо $\mathbf{s} = \sum_{k=0}^{r-1} C^k\mathbf{x}$. Очевидно, $C\mathbf{s} = \mathbf{s}$. За лемою 2.2.2, $\mathsf{Q}(\mathbf{s}) = 0$, звідки $\mathbf{s} = 0$, а тому принаймні один з коренів $C^k\mathbf{x}$ не є додатним. □

Надалі позначимо через σ_k та $\mathbf{e}_k$ при довільному цілому k такі σ_i та $\mathbf{e}_i$, що $i \equiv k \pmod{n}$.

roots Наслідок 2.2.7. *Нехай $\mathsf{Q} > 0$, $\mathbf{x}$ — додатний корінь. Існує таке $m \geqslant 0$, що $\mathbf{x} = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m\mathbf{e}_{m+1}$, причому всі корені $\sigma_k\sigma_{k+1}\dots\sigma_m\mathbf{e}_{m+1}$ при $1 \leqslant k \leqslant m$ є додатними.*

Доведення. Позначимо $\mathbf{x}_s = \sigma_s \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{x}$. Зокрема, $C^k\mathbf{x} = \mathbf{x}_{kn}$. З наслідку 2.2.6 випливає, що існує таке m, що всі корені $\mathbf{x}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ додатні, але корінь $\mathbf{x}_{m+1}$ таким вже не є. Тоді, за наслідком 2.2.5, $\mathbf{x}_m = \sigma_m \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{x} = \mathbf{e}_{m+1}$. Звідси $\mathbf{x} = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m\mathbf{e}_{m+1}$, причому $\sigma_k \dots \sigma_m\mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{x}_{k-1}$ — додатний корінь при $1 \leqslant k \leqslant m$. □

Отже, всі додатні корені одержуються з *простих коренів* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ застосуванням віддзеркалень.

s23

2.3. Функтори віддзеркалень

У цьому підрозділі ми побудуємо функтори, які «реалізують» віддзеркалення на категоріях зображень. Ці функтори будуються для спеціальних класів вершин сагайдака.

231 Означення 2.3.1. (1) Вершина i сагайдака Γ зветься *додатною*, якщо в ній не починається жодна стрілка, і *від'ємною*, якщо в ній не закінчується жодна стрілка.

(2) Якщо i — вершина сагайдака Γ, то через $\sigma_i\Gamma$ позначимо сагайдак, який одердується з Γ зміною напрямку всіх стрілок, які починаються або закінчуються у вершині i. Отже $\sigma\Gamma$ має ті самі множини вершин і стрілок, але такий, що якщо $\alpha : i \to j$ у сагайдаку Γ, то $\alpha : j \to i$ у сагайдаку $\sigma_i\Gamma$, а якщо $\alpha : j \to i$ у сагайдаку Γ, то $\alpha : i \to j$ у сагайдаку $\sigma_i\Gamma$. Всі інші стрілки зберігають свої початкі й кінці.

(3) Нумерація вершин $\operatorname{Ver}\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ сагайдака Γ зветься *додатною* (*від'ємною*), якщо 1 — додатна (від'ємна) вершина, 2 — додатна (від'ємна) вершина у сагайдаку $\sigma_1\Gamma$ і взагалі, для кожного $m < n$, вершина m є додатною (від'ємною) у сагайдаку $\sigma_{m-1} \dots \sigma_2\sigma_1\Gamma$.

232 Лема 2.3.2. *Якщо у сагайдаку Γ немає орієнтованих циклів (зокрема, петель), то існують додатна і від'ємна нумерації його вершин.*

Доведення. Очевидно, якщо $\{1, 2, \dots, n\}$ — додатна нумерація, то $\{n, n-1, \dots, 1\}$ — від'ємна і навпаки. Якщо у сагайдаку немає циклів, то довжини шляхів у ньому обмежені. Позначимо через $w(i)$ найбільшу довжину шляхів, які починаються у вершині i. Занумеруємо вершини так $\{1, 2, \dots, n\}$, щоб $w(1{\leqslant}w(2) \leqslant \dots \leqslant w(n)$. Тоді, якщо стрілка $\alpha : i \to j$, то $i < j$. Отже, 1 — додатни вершина, 2 — додатна у сагайдаку $\sigma_1\Gamma$ і взагалі m — додатна у сагайдаку $\sigma_{m-1} \dots, \sigma_2\sigma_1\Gamma$, тобто ця нумерація додатна. □

233 Означення 2.3.3. Нехай i — від'ємна вершина, $\alpha_k : i \to j_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ — усі стрілки, які починаються у вершині i. Для кожного зображення $V \in \mathsf{Rep}(\Gamma)$ позначимо через $A_i^V : V(i) \to \bigoplus_{k=1}^m V(j_k)$ відображення з компонентами $A_k = V(\alpha_k)$.

(1) Визначимо зображення $V' = \sigma_i^- V \in \mathsf{Rep}(\sigma_i\Gamma)$ у такий спосіб:

(a) $V'(j) = V(j)$ для всіх $j \neq i$, і $V'(\beta) = V(\beta)$, якщо β не починається в точці i.

(b) $V'(i) = \operatorname{Coker} A_i^V$.

(c) $V'(\alpha_k) : V(j_k) \to V'(i)$ — обмеження на підпростір $V(j_k)$ канонічної сюр'єкції $\pi_i^V : \bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \to V'(i)$.

(2) Якщо W — інше зображення сагайдака Γ, $\phi : V \to W$ — морфізм зображень, визначимо морфізм $\phi' = \sigma_i^- \phi : \sigma_i^- V \to \sigma_i^- W$ у такий спосіб:

(a) $\phi'(j) = \phi(j)$, якщо $j \neq i$.

(b) $\phi'(i) : V'(i) \to W'(i)$ — єдиний гомоморфізм, який робить комутативною діаграму

$$\begin{tikzcd}
V(i) \arrow[r, "A_i^V"] \arrow[d, "\phi(i)"'] & \bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[d, "\bigoplus_{k=1}^m \phi(j_k)"] & V'(i) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'(i)"] & 0 \\
W(i) \arrow[r, "A_i^W"] & \bigoplus_{k=1}^m W(j_k) \arrow[r, "\pi_W"] & W'(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(Поясніть чому $\phi'(i)$ існує й єдиний).

Легко бачити, що в такий спосіб ми одержуємо функтор $\sigma_i^- : \mathsf{Rep}(\Gamma) \to \mathsf{Rep}(\sigma_i\Gamma)$. Позначимо через E_i *тривіальне зображення у вершині* i: $E_i(i) = \Bbbk$, $E_i(j) = 0$, якщо $j \neq i$, $E_i(\alpha) = 0$ для всіх стрілок α. З означення σ_i^- одразу випливає, що $\sigma_i^- E_i = 0$. Виявляється, що це — єдиний випадок.

234 Лема 2.3.4. *Нехай зображення V не має прямих доданків, ізоморфних E_i.*

(1) *Відображення A_i^V є моніком.*

Очевидно, й навпаки, якщо A_i^V є моніком, V не має прямих доданків, ізоморфних E_i.

(2) $\mathbf{dim}\, \sigma_i^- V = \sigma_i \, \mathbf{dim}\, V$.

Доведення. (1) Якщо $v \in \operatorname{Ker} A_i^V$, то $\alpha_k(v) = 0$ для всіх k. Якщо $v \neq 0$, нехай $U(i)$ — доповнення до одновимірного підпростору $\langle v \rangle$ у просторі $V(i)$, $U(j) = V(j)$ при $j \neq i$, $U(\beta) = V(\beta)$, якщо $\beta \notin \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \}$ і $U(\alpha_k)$ — обмеження $V(\alpha_k)$ на $U(i)$. Тоді $V \simeq U \oplus N$, де $N(i) = \langle v \rangle$, $N(j) = 0$ при $j \neq i$, тобто $N \simeq E_i$.

(2) Оскільки A_i^V монік, $\dim V'(i) = \sum_{k=1}^m \dim V(j_k) - \dim V(i)$. Але це як раз і є i-ю координатою вектора $\sigma\, \mathbf{dim}\, V$. □

233a Означення 2.3.3a. Нехай i — додатна вершина, $\alpha_k : j_k \to i$ ($k = 1, 2, \dots, m$) — усі стрілки, які закінчуються у вершині i. Для кожного зображення $V \in \mathsf{Rep}(\Gamma)$ позначимо через $A_i^V : \bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \to V(i)$ відображення з компонентами $A_k = V(\alpha_k)$.

(1) Визначимо зображення $V' = \sigma_i^+ V \in \mathsf{Rep}(\sigma_i\Gamma)$ у такий спосіб:

(a) $V'(j) = V(j)$ для всіх $j \neq i$, і $V'(\beta) = V(\beta)$, якщо β не закінчується в точці i.

(b) $V'(i) = \operatorname{Ker} A_i^V$.

(c) $V'(\alpha_k) : V'(i) \to V(j_k)$ — композиція занурення $\iota_i^V : V'(i) \to \bigoplus_{k=1}^m V(j_k)$ з проекцією на прямий доданок $\bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \to V(j_k)$.

(2) Якщо W — інше зображення сагайдака Γ, $\phi : V \to W$ — морфізм зображень, визначимо морфізм $\phi' = \sigma_i^+ \phi : \sigma_i^+ V \to \sigma_i^+ W$ у такий спосіб:

(a) $\phi'(j) = \phi(j)$, якщо $j \neq i$.

(b) $\phi'(i) : V'(i) \to W'(i)$ — єдиний гомоморфізм, який робить комутативною діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V'(i) \arrow[r, "\iota'_V"] \arrow[d, "\phi(i)"'] & \bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \arrow[r, "A_i^V"] \arrow[d, "\bigoplus_{k=1}^m \phi(j_k)"] & V(i) \arrow[d, "\phi(i)"] \\
0 \arrow[r] & W'(i) \arrow[r, "\iota_W"] & \bigoplus_{k=1}^m W(j_k) \arrow[r, "A_i^W"] & W'(i)
\end{tikzcd}$$

(Поясніть чому $\phi'(i)$ існує й єдиний).

Знов-таки, ми одержуємо функтор $\sigma_i^+ : \mathsf{Rep}(\Gamma) \to \mathsf{Rep}(\sigma_i\Gamma)$, причому $\sigma_i^+ E_i = 0$. Аналогічно лемі 2.3.4 доводиться наступний результат.

$\boxed{\text{234a}}$ Лема 2.3.4а. *Нехай зображення V не має прямих доданків, ізоморфних E_i.*

(1) *Відображення A_i^V є епіком.*

Очевидно, й навпаки, якщо A_i^V є епіком, V не має прямих доданків, ізоморфних E_i.

(2) $\mathbf{dim}\, \sigma_i^+ V = \sigma_i \,\mathbf{dim}\, V$.

Позначимо через $\mathsf{Rep}^i(\Gamma)$ повну підкатегорію категорії $\mathsf{Rep}(\Gamma)$, яка складається з тих зображень, які не мають прямих доданків, ізоморфних E_i. З означення функторів $\sigma_i^\pm$ одразу випливає, що $\sigma_i^\pm(\mathsf{Rep}^i(\Gamma)) \subseteq \mathsf{Rep}^i(\sigma\Gamma)$. Надалі ми розглядаємо ці функтори як такі, що діють на категорії $\mathsf{Rep}^i(\Gamma)$.

$\boxed{235}$ Твердження 2.3.5. *Якщо i — від'ємна (відповідно, додатна) вершина, то $\sigma_i^+\sigma_i^- = \mathbf{1}_{\mathsf{Rep}^i(\Gamma)}$ (відповідно, $\sigma_i^-\sigma_i^+ = \mathbf{1}_{\mathsf{Rep}^i(\Gamma)}$). Зокрема, зображення V є нерозкладним тоді й лише тоді, коли таким є $\sigma_i^- V$ (відповідно, $\sigma_i^+ V$).*

Доведення. Якщо i від'ємна вершина, а $V \in \mathsf{Rep}^i(\Gamma)$, то послідовність

$$0 \to V(i) \xrightarrow{A_i^V} \bigoplus_{k=1}^m V(j_k) \xrightarrow{\pi_i^V} V'(i) \to 0$$

є точною, а компоненти відображення π_i^V — це відображення $V'(\alpha_k)$. Отже, $\pi_i^V = A_i^{V'}$, $V(i) = \operatorname{Ker} A_i^{V'}$ і, $A_i^V = \iota_i^{V'}$, тобто $\sigma_i^+\sigma_i^-(V) = V$. Звідси очевидно, що й $\sigma_i^+\sigma_i^-\phi = \phi$. □

Тепер ми можемо довести теорему Ґабріеля у формі, запропонованій Бернштейном–Гельфандом–Пономарьовим [**1**].

BGP Теорема 2.3.6. *Нехай* $\mathrm{Q}_\Gamma > 0$, V *— нерозкладне зображення сагайдака* Γ, $\mathbf{d} = \mathbf{dim}\, V$, $\{1, 2, \dots, n\}$ *— від'ємна нумерація вершин сагайдака* Γ.

(1) *Існує таке* $m \geqslant 0$, *що* $V \simeq \sigma_1^+\sigma_2^+ \dots \sigma_m^+ E_{m+1}$, *де* E_{m+1} *розглядається як зображення сагайдака* $\sigma_m \dots \sigma_2\sigma_1\Gamma$.

(2) *Якщо* W *— інше нерозкладне зображення розмірності* $\mathbf{d}$, *то* $W \simeq V$.

(3) *Розмірності нерозкладних зображень сагайдака* Γ *збігаються з додатними коренями форми* Q_Γ.

Згідно з твердженням 2.2.3, тоді є лише скінченна кількість неізоморфних зображень (з точністю до ізоморфізму).

Доведення. (1) Якщо $V \simeq E_1$, покладемо $m = 0$. Припустимо, що $V \not\simeq E_1$, тоді $\mathbf{d} \neq \mathbf{e}_1$. За твердженням 2.2.7, існує таке m, що $\sigma_m \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{d} = \mathbf{e}_{m+1}$ і всі вектори $\mathbf{d}_k = \sigma_k \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{d}$ $(k \leqslant m)$ додатні. Тоді $\mathbf{d}_k =\neq \mathbf{e}_{k+1}$ при $k < m$. За лемою 2.3.4, $\mathbf{dim}\, \sigma_1^- V = \sigma_1\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$. Індукцією за k отримуємо, що $\mathbf{dim}(\sigma_k^- \dots \sigma_2^-\sigma_1^- V) = \mathbf{d}_k$. Зокрема, $\mathbf{dim}(\sigma_m^- \dots \sigma_2^-\sigma_1^- V) = \mathbf{e}_{m+1}$, звідки $\sigma_m^- \dots \sigma_2^-\sigma_1^- V \simeq E_{m+1}$ і, за твердженням 2.3.5, $V \simeq \sigma_1^+\sigma_2^+ \dots \sigma_m^+ E_{m+1}$. Крім того, звідси віпливає, що $\mathbf{d} = \sigma_1 \dots \sigma_m \mathbf{e}_{m+1}$ — корінь форми Q_Γ.

(2) Якщо W також нерозкладне і $\mathbf{dim}\, W = \mathbf{d}$, то до W застосовні ті самі міркування, тому також $W \simeq \sigma_1^+\sigma_2^+ \dots \sigma_m^+ E_{m+1} \simeq V$.

(3) Якщо $\mathbf{x}$ — додатний корінь форми Q_Γ, за наслідком 2.2.7 існує таке m, що $\sigma_m \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{x} = \mathbf{e}_{m+1}$ і всі вектори $\mathbf{x}_k = \sigma_k \dots \sigma_2\sigma_1\mathbf{x}$ $(k \leqslant m)$ додатні. Зауважимо, що $\mathbf{x}_k = \sigma_{k+1} \dots \sigma_m \mathbf{e}_{m+1}$. Тому визначені всі зображення $\sigma_{k+1}^+ \dots \sigma_m^+ E_{m+1}$ і всі вони нерозкладні. Зокрема, таким є зображення $\sigma_1^+ \dots \sigma_m^+ E_{m+1}$, розмірність якого дорівнює $\sigma_1 \dots \sigma_m \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{x}$. □

237 Приклад 2.3.7. Нехай Γ — сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & & 3 \\ 2 & 1 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & 4 \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Q}_\Gamma = \sum_{i=1}^4 x_i^2 - x_1 \sum_{i=1}^3 x_1 x_i$. Легко бачити, що вектор $\mathbf{d} = (2, 1, 1, 1)$ є коренем форми Q_Γ. Обчислення дають $\sigma_1\mathbf{d} = (1, 1, 1, 1)$, $\sigma_2\sigma_1\mathbf{d} = (1, 0, 1, 1)$, $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\mathbf{d} = (1, 0, 0, 1)$ і $\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1\mathbf{d} = \mathbf{e}_1$. Отже, нерозкладне зображення V розмірності $\mathbf{d}$ ізоморфне $\sigma_1^+\sigma_2^+\sigma_3^+\sigma_4^+ E_1$, де останнє розглядається як зображення сагайдака $\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1\Gamma = \Gamma$.

У зображенні $\sigma_4^+ E_1 = V_4$, маємо $V_4(1) = E_1(1) = \Bbbk$, $V_4(2) = V_4(3) = 0$, $V_4(4) = \mathrm{Ker}(\Bbbk \to 0) = \Bbbk$ і $V_4(\gamma) = 1$. Оскільки єдиним сусідом вершини 2 або 3 є вершина 1, так само у зображенні $V_3 = \sigma^+ 3 V_4$ з'явиться простір $V_3(3) = \Bbbk$ і відображення $V_3(\beta) = 1$, а у зображенні $V_2 = \sigma^+ 2 V_3$ з'явиться простір $V_2(3) = \Bbbk$ і відображення $V_2(\beta) = 1$. Отже зображення V_2

задається такою діаграмою:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \mathbb{k} \arrow[dl, "1"'] \\ \mathbb{k} \arrow[r, "1"] & \mathbb{k} & \\ & & \mathbb{k} \arrow[ul, "1"] \end{tikzcd}$$

У зображенні $V = \sigma_1^+ V_2$ тоді $V(i) = \mathbb{k}$ для $i \in \{2, 3, 4\}$, а $V(4)$ — ядро гомоморфізму $3\mathbb{k} \xrightarrow{(1\,1\,1)} \mathbb{k}$, тобто підпростір векторів (x, y, z) таких, що $x + y + z = 0$. База цього підпростору — вектори $v_1 = (1, 0, -1)$ і $v_2 = (0, 1, -1)$. При цьому $V(\alpha)$ — проектування на $V(2)$, тобто взяття першої координати, звідки $V(\alpha)V_1 = 1$, $V(\alpha)v_2 = 0$. Аналогічно $V(\beta)v_1 = 0$, $V(\beta)v_2 = 1$, а $V(\gamma)v_1 = V(\gamma)v_2 = -1$. Змінивши знак у базового вектора з $V(4)$, можна зробити $V(\gamma)v_1 = V(\gamma)v_2 = 1$. Отже зображення V розмірності $\mathbf{d}$ задається діаграмою

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \mathbb{k} \\ \mathbb{k} & \mathbb{k}^2 \arrow[l, "(1\ 0)"'] \arrow[ur, "(0\ 1)"] \arrow[dr, "(1\ 1)"'] & \\ & & \mathbb{k} \end{tikzcd}$$

s24

2.4. Сагайдак Кронекера

Сагайдак Кронекера — це сагайдак вигляду $\Gamma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$. Його зображення V розмірності $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ задається парою матриць $A = V(\alpha)$, $B = V(\beta)$ розміру $d_2 \times d_1$. Ми писатимемо $V = (A, B)$. Морфізм $f : V \to V' = (A', B')$, де $\mathbf{dim}\, V' = (d_1', d_2')$, задається парою матриць $S = f(1)$, розміру $d_1' \times d_1$ і $T = f(2)$, розміру $d_2' \times d_2$ таких, що $A'S = TA$ і $B'S = TB$. Зокрема, $V \simeq V'$ тоді й лише тоді, коли існують невироджені матриці S, T такі, що $A' = TAS^{-1}$ і $B' = TBS^{-1}$. Задача про зображення сагайдака Кронекера відома з XIX сторіччя, як задача про *пучки матриць* («*matrix pencils*»).

Очевидно $\sigma_1\Gamma = \sigma_2\gamma = \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$ — теж сагайдак Кронекера (з іншою нумерацією вершин). При цьому $\sigma_1(d_1, d_2) = (2d_2 - d_1, d_2)$ і $\sigma_2(d_1, d_2) = (d_1, 2d_1 - d_2)$. Зокрема, $\sigma_1\mathbf{d} = \mathbf{d}$ тоді й лише тоді, коли $d_1 = d_2$, і те саме вірно для σ_2. Зауважимо, що $\mathrm{Q}_\Gamma(x, y) = (x - y)^2$, тобто $d_1 = d_2$ тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 0$. Ми побачимо, що такі розмірності відіграють спеціальну роль у теорії зображень сагадйака Кронекера. Це показує наступна теорема.

real

Теорема 2.4.1. *Нехай* $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$, *де* $d_1 \neq d_2$.

(1) *Наступні умови еквівалентні:*
  (a) $\mathbf{d}$ *є розмірністю нерозкладного зображення сагайдака Кронекера* Γ.
  (b) $\mathrm{Q}_\Gamma(d_1, d_2) = 1$.

(c) $d_2 = d_1 \pm 1$.

(2) *Якщо V і V' — нерозкладні зображення розмірності $\mathbf{d}$, то $V \simeq V'$.*

(3) *Нехай V — нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}$.*

(a) *Якщо $d_1 > d_2$, то $V \simeq \sigma_1^+\sigma_2^+ \dots \sigma_m^+ E_i$ для якогось i, де $m \not\equiv i \pmod 2$.*

(b) *Якщо $d_2 > d_1$, то $V \simeq \sigma_2^-\sigma_1^- \dots \sigma_m^- E_i$ для якогось i, де $m \equiv i \pmod 2$.*

Доведення. (3) Перш за все, зауважимо, що в нерозкладному зображенні $V \not\simeq E_i$ $(i = 1, 2)$ відображення $2V(1) \xrightarrow{(V(\alpha)\ V(\beta))} V_2$ має бути сюо'єктивним, а $V_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} V(\alpha) \\ V(\beta) \end{pmatrix}}$ — ін'єктивним. Тому якщо $\mathbf{dim}\, V = \mathbf{d} = (d_1, d_2)$, то $2d_1 \geqslant d_2$ і $2d_2 \geqslant d_1$. Нехай $d_1 > d_2$. Застосуємо віддзеркалення σ_1^-. Зображення $V_1 = \sigma_1^- V$ також нерозкладне і у векторі $\mathbf{dim}\, V_1 = \mathbf{d}_1 = (2d_2 - d_1, d_2)$ маємо $d_2 > 2d_2 - d_1$. Отже. ми отримали розмірність зображення для того ж сагайдака, в якій знову більша координата відповідає від'ємній вершині (тепер це 2), але при цьому вона зменшилась. Продовжуючи цю процедуру, ми врешті решт мусимо отримати вектор з від'ємною координатою. Але оскільки кожного разу до цього ми отримуємо розмірність нерозкладного зображення, це можливо лише якщо останння додатна розмірність — це E_i $(i = 1, 2)$. Отже $\sigma_m^- \dots \sigma_2^- \sigma_1^- V = E_i$, де $m \not\equiv i \pmod 2$, і $V \simeq \sigma_1^+\sigma_2^+ \dots \sigma_m^+ E_i$. Випадок $d_2 > d_1$ цілком аналогічний (тут треба починати з σ_2).

(2) випливає з попереднього розгляду, оскільки номер m залежить лише від розмірності $\mathbf{d}$. З циз самих міркувань випливає, що розмірності нерозкладних зображень, у яких $d_1 \neq d_2$, є додатними коренями форми Q_Γ.

(1) Рівносильність (b) і (c) випливає з виду форми Q_Γ. З іншого боку, легко перевірити, що $\sigma_1(n+1, n) = (n-1, n)$, а $\sigma_2(n, n+1) = (n, n-1)$. Тому, якщо $d_2 = d_1 \pm 1$, то послідовними віддзеркаленнями розмірність $\mathbf{d}$ зводиться до $\mathbf{e}_1$ або $\mathbf{e}_2$. Отже $\mathbf{d} = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m \mathbf{e}_i$ або $\mathbf{d} = \sigma_2\sigma_1 \dots \sigma_m \mathbf{e}_i$ для деяких i та m. Тоді відповідними функторами віддзеркалень ми отримаємо з E_i нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}$. Це доводить рівносильність (a) і (c). $\square$

Користуючись цим результатом, неважко перевірити, що нерозкладне зображення розмірності $(n+1, n)$ задаєітся парою матриць

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а нерозкладне зображення розмірності $(n+1, n)$ — парою матриць $A_n^\top, B_n^\top$ (див. вправу 8.4).

Розглянемо тепер випадок, коли $\mathbf{d} = (d, d)$. У цьому випадку має місце такий результат.

imaginary ТЕОРЕМА 2.4.2. *Усі нерозкладні зображення V сагайдака Кронекера розмірності (d, d) задаються одною з наступних пар матриць:*

(I_d, F), *де F — клітина Фробеніуса розміру $d \times d$,*
характеристичний многочлен якої є степенем незвідного,

(J_d, I_d), *де J_d — нільпотентна клітина Жордана розміру $d \times d$.*

Всі перераховані зображення нерозкладні й попарно неізоморфні.

Якщо поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, клітини Фробеніуса можна замінити на клітини Жордана.

Доведення ґрунтується на наступній лемі.

243 ЛЕМА 2.4.3. *Якщо зображення сагайдака Кронекера задається парою вироджених квадратних матриць (A, B), воно розкладне.*

ДОВЕДЕННЯ. Перетвореннями $A \mapsto TAS^{-1}$ матрицю A можна звести до вигляду $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будемо вважати, що A вже має такий вигляд, і надалі робитимемо лише перетворення, які цей вигляд не змінюють. Це означає, що $TAS^{-1} = A$, або $TA = AS$. Розіб'ємо матриці S, T і B на блоки, узгоджено з розбитком матриці A:

bb
$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Оскільки

$$TA = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} = AS = \begin{pmatrix} S_3 & S_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то $T_3 = S_3 = 0$, $S_4 = T_1$, тобто

st
$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

де матриці T_1 і S_1 обертовні. Отже, якщо пари (A, B) і (A, B') визначають ізоморфні зображення, то $TB = B'S$, або, поелементно,

bb1
$$\begin{aligned} &T_1B_1 + T_2B_3 = B_1'S_1, \\ &T_1B_2 + T_2B_4 = B_1'S_2 + B_2'T_1, \\ &T_4B_3 = B_3'S_1, \\ &T_4B_4 = B_3'S_2 + B_4'T_1. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Будемо казати, що блочна матриця B вигляду (2.4.1) *розкладна*, якщо існують матриці T і S вигляду (2.4.2) такі, що існує розбиття рядків і стовпчиків матриці $B' = TBS^{-1}$, відносно якого кожен блок B'_i має вигляд

$$B'_i = \begin{pmatrix} B'_{i1} & 0 \\ 0 & B'_{i2} \end{pmatrix},$$

причому блоки B_{21} і B_{22} квадратні і, можливо, деякі горизональні або вертикальні полоси відсутні. Легко бачити, що у цьому випадку зображення (A, B) є розкладним. Так, зокрема, буде, якщо у матриці $\begin{pmatrix} B'_1 \\ B'_3 \end{pmatrix}$ є нульовий стовпчик або у матриці $(B'_3 \ B'_4)$ є нульовий рядок. Ми маємо довести, що якщо матриця B вироджена, вона розкладна.

Оскільки матриці T_4 і S_1 довільні, матрицю $B'_3 = T_4 B_3 S_1^{-1}$ можна звести до вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тоді, підібравши відповідні матриці T_2 і S_2 і поклавши $T_1 = T_4 = S_1 = I$, можна звести матриці B_1 і B_4 до вигляду

$$B'_1 = \begin{pmatrix} B'_{11} & 0 \end{pmatrix}, \quad B'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ B'_{41} \end{pmatrix}$$

і, якщо $B'_3 \neq 0$, матриця B' розкладна. Тому надалі вважатимемо, що $B_3 = 0$. Якщо обидві матриці B_1 і B_4невроджені, то й B невироджена. Припустимо, що B_1 вироджена. Якщо її стовпчики лінійно залежні, в ній можна зробити нульовий стовпчик і B є розкладною. Якщо стовпчики B_1 лінійно незалежні, її можна звести до вигляду $\left(\begin{smallmatrix} I \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Підібравши підходящу матрицю S_2, можна звести матрицю B_2 до вигляду $B'_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & C_2 \end{smallmatrix}\right)$, нульова матриця у лівому верхньому кутку — квадратна такого ж розміру, як одиничний блок у матриці B'_2, а матриця C_2 також квадратна. Матриця B_4 розіб'ється на відповідні блоки $B'_4 = \begin{pmatrix} C_3 & C_4 \end{pmatrix}$. Покладемо

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

тобто

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці T і S з формул (2.4.2) розбити на менші блоки, згідно з розбиттям матриці B, і вважати, що вони мають вигляд

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{21} \\ 0 & T_{14} & T_{22} \\ 0 & 0 & T_4 \end{pmatrix}, \ S = \begin{pmatrix} T_{11} & S_{21} & S_{22} \\ 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 & T_{14} \end{pmatrix},$$

причому $S_{21} = T_{12}C_1 + T_{21}C_3$, а $S_{22} = T_{12}C_2 + T_{21}C_4$, то матимемо $TB = B'S$, де

$$B' = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C'_1 & C'_2 \\ 0 & C'_3 & C'_4 \end{pmatrix},$$

причому

$$
\begin{aligned}
&T_{14}C_1 + T_{22}C_3 = C_1'T_{11},\\
&T_{14}C_2 + T_{22}C_4 = C_1'T_{12} + C_2'T_{14},\\
&T_4C_3 = C_3'T_{11},\\
&T_4C_4 = C_3'T_{12} + C_4'T_{14}.
\end{aligned}
$$

Ці співвідношення, з точністю до позначень, збігаються зі співвідношеннями (2.4.3). Легко бачити також, що якщо матриця C розкладна, такою є й матриця B. Якщо B вироджена, C також вироджена. Оскільки C меншого розміру, ніж B, доведення можна завершити очевидною індукцією. □

Доведення теореми 2.4.2. Нехай пара квадратних матриць (A, B) розміру $d \times d$ задає нерозкладне зображення. За лемою 2.4.3, одна з цих матриць невироджена. Якщо A невироджена, вона зводиться до I_d. Пари (I_d, B) і (I_d, B') задають ізоморфні зображення тоді й лише тоді, коли $B' = TBT^{-1}$. Такими перетвореннями B зводиться до нормальної форми Фробеніуса (якщо $\Bbbk$ алгебрично замкнене, то до нормальної форми Жордана). З нерозкладності випливає, що присутня лише одна клітина, причому її характеристичний многочлен є степенем незвідного.

Якщо матриця A вироджена, то B невироджена і ті сами міркування показують, що пара (A, B) зводиться до (J_d, I_d). (Оскільки A вироджена, її характеристичний многочлен має бути x^d, а тоді $A = J_d$). □

s25

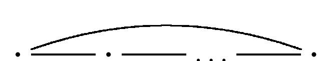
2.5. Ручні сагайдаки

251 Означення 2.5.1. Сагайдак Γ зветься *ручним*, якщо його форма Тітса не є додатно визначеною, але є невід'ємною, тобто $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для кожного вектора $\mathbf{x}$.

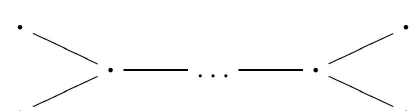
252 Зауваження 2.5.2. Це не є оригінальне означення ручних сагайдаків, але відомо, що вони рівносильні.

Усі ручні сагайдаки відомі. У зв'язному випадку відповідні неорієнтовані графи — це *розширені схеми Динкіна*:

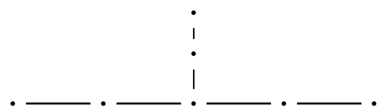
$\tilde{A}_n$:



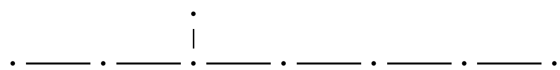
$\tilde{D}_n$:



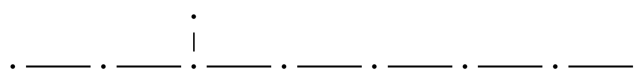
$\tilde{E}_6$



$\tilde{E}_7$



$\tilde{E}_8$



(у перших двох випадках усього $n+1$ вершина, зокрема, $\tilde{A}_1$ — сагайдак Кронекера).

Нескладно довести, що у всіх цих випадках усі вектори $\mathbf{x}$, для яких $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{x}) = 0$, мають вигляд $c\boldsymbol{\delta}$, де $c \in \mathbb{R}$, а $\boldsymbol{\delta}$ — вектор з додатними цілими координатами, які не мають спільних множників. Наприклад, для сагайдака $\tilde{A}_n$ — це вектор $(1, 1, \ldots, 1)$.

Встановлено (див. напр. [**4**]) наступні результати про зображення ручних сагайдаків.

(1) Вектор $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{n+1}$ є розмірністю нерозкладного зображення тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) \in \{0, 1\}$.
(2) Якщо $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 1$, існує єдине нерозкладне зображення розмірності $\mathbf{d}$.
(3) Якщо $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{d}) = 0$, а поле $\Bbbk$ нескінченне, існує безліч неізоморфних нерозкладних зображень розмірності $\mathbf{d}$.
(4) Якщо поле $\Bbbk$ скінченне, $\#(\Bbbk) = q$, а $\mathbf{d} = m\boldsymbol{\delta}$, то кількість нерозкладних зображень розмірності $\mathbf{d}$ не менша, ніж $q+1$, і необмежено зростає, коли $m \to \infty$.

Домашні завдання

sz

Завдання 1.

v11 1.1. *Діаграма прямої суми n об'єктів* — це діаграма вигляду

ez1 (Д.1)
$$A_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} A \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

в якій виконуються рівності

$$\begin{aligned} &p_k i_k = 1_{A_k},\\ &p_k i_l = 0, \text{ якщо } i \neq l,\\ &\sum\nolimits_{k=1}^{n} i_k p_k = 1_A. \end{aligned}$$

Доведіть, що при фіксованих $A_1, A_2, \dots, A_n$ об'єкт A визначається з точністю до ізоморфізму. Тому ми писатимемо $A \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$.

v12 1.2. Нехай

ez2 (Д.2)
$$B_k \underset{p'_k}{\overset{i'_k}{\rightleftarrows}} B \qquad (k = 1, 2, \dots, m),$$

— інша діаграма прямої суми. Для кожного морфізму $\alpha : A \to B$ визначимо *матрицю морфізму α відносно розкладів* (Д.1) *та* (Д.2) як $m \times n$ матрицю $[\alpha] = (\alpha_{kl})$, в якій $\alpha_{kl} = p'_k \alpha i_l$ (це морфізм $A_l \to B_k$). Доведіть, що цим встановлюється біекція множини морфізмів $A \to B$ та множиною $m \times n$ матриць, в яких на kl-му місці стоять морфізми $A_l \to B_k$.

v13 1.3. Доведіть, що якщо

$$C_k \underset{p''_k}{\overset{i''_k}{\rightleftarrows}} C \qquad (k = 1, 2, \dots, r),$$

— ще одна діаграма прямої суми, $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, то $[\beta\alpha] = [\beta][\alpha]$.

v14 1.4. Доведіть, що коли $A \simeq \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$, $B \simeq \bigoplus_{k=m+1}^{n} A_k$ і $C \simeq A \oplus B$, то $C \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$.

Зокрема, у адитивній категорії існують прямі суми довільного скінченнного набору об'єктів.

Завдання 2.

21 2.1. Нехай $\Phi : \mathscr{A}^A \to \mathscr{A}^B$ — морфізм представницьких функторів. За лемою Йонеди, він визначається морфізмом $\alpha = \Phi(A)1_A \in \mathscr{A}(B, A)$. Доведіть, що тоді $\Phi = \mathscr{A}^\alpha$, тобто діє, як множення праворуч на α. Перевірте також, що $\mathscr{A}^{\beta\alpha} = \mathscr{A}^\alpha \mathscr{A}^\beta$, де $\beta : B \to C$.

22 2.2. Доведіть, що якщо $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — $\mathbb{k}$-категорії, а еквівалентність $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ є $\mathbb{k}$-лінійним функтором, то квазіобернений функтор $F' : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ є також $\mathscr{K}$-лінійним. У цьому випадку ми казатимемо, щр F — *еквавалентність $\mathbb{k}$-категорій*.

22 2.3. Нехай $(M, \leqslant)$ — квазівпорядкована множина. Визначимо відношення $\sim$ на M, вважаючи, що $x \sim y$ тоді й лише тоді, коли одночасно $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$.

(1) Перевірте, що $\sim$ — відношення еквівалентності.
Позначимо через $\overline{M}$ множину класів еквівалентності й перенесемо на неї відношення $\leqslant$, вважаючи, що $X \leqslant Y$ тоді й лише тоді, коли $x \leqslant y$ для деяких (а тоді для всіх) $x \in X$, $y \in Y$.
(2) Перевірте, що $\overline{M}$ — частково впорядкована множина.
(3) Доведіть, що якщо розглядати M і $\overline{M}$ як категорії (див. приклад 1.1.2,(4)), то вони еквівалентні.

23 2.4. Нехай $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — еквівалентність категорій. Доведіть, що морфізм $\alpha \in \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ є моніком (або епіком, або ізоморфізмом) тоді й лише тоді, коли таким є морфізм $F\alpha \in \mathscr{B}(FA, FB)$.

24 2.5. Доведіть, що якщо $\mathscr{A} \simeq \mathscr{A}'$ і $\mathscr{B} \simeq \mathscr{B}'$, то й $\mathsf{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \simeq \mathsf{Fun}(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$.

Завдання 3.

3.1. Нехай M є $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем, а N — $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем. Визначте на $M \otimes_{\boldsymbol{B}} N$ будову $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{C}$-бімодуля і встановіть ізоморфізм $(M \otimes_{\boldsymbol{B}} N) \otimes_{\boldsymbol{C}} L \simeq M \otimes_{\boldsymbol{B}} (N \otimes_{\boldsymbol{C}} L)$ для довільного $\boldsymbol{C}$-модуля C.

$\boxed{\texttt{gd}}$ 3.2 (Двоїстість Гельфанда). Для кожного $\boldsymbol{A}$-модуля M позначимо $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \boldsymbol{A})$. Це — правий $\boldsymbol{A}$-модуль відносно дії $(fa)(x) = f(a)x$ для кожного $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Позначимо $\gamma_M : M \to \hat{\hat{M}} = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\hat{M}, \boldsymbol{A})$ відображення, яке переводить елемент $x \in M$ у гомоморфізм $\gamma_M(x) : \hat{M} \to \boldsymbol{A}$, для якого $\gamma_M(x)(f) = f(x)$. Доведіть, що якщо M — скінченнопороджений проективний модуль, то γ_M є ізоморфізмом.
Вказівка: Перевірте, що якщо $M = N \oplus L$, то γ_M є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли такими є γ_N і γ_L. Далі скористайтеся тим, що $\gamma_{\boldsymbol{A}}$ є ізоморфізмом.

$\boxed{\texttt{ex3}}$ 3.3. Визначимо гомоморфізм $\phi : \hat{M} \otimes_{\boldsymbol{A}} N \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$ правилом $\phi(f \otimes x)(y) = f(y)x$, де $f \in \hat{M}$, $x \in N$, $y \in M$.

(1) Перевірте, що ϕ є коректно визначеним гомоморфізмом.
(2) Доведіть, що якщо M — скінченнопороджений проективний $\boldsymbol{A}$-модуль, то ϕ є ізоморфізмом.
Вказівка: Міркування, аналогічні задачі 3.2.

$\boxed{\texttt{ex4}}$ 3.4. Якщо M є $\boldsymbol{A}$-модулем, а N є $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$-бімодулем, визначте на $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$ будову правого $\boldsymbol{B}$-модуля і доведіть, що для кожного правого B-модуля L має місце ізоморфізм

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(L, N)).$$

3.5. З задач 3.2–3.4 виведіть, що якщо $\boldsymbol{A}$-модуль M є скінченнопородженим і проективним, то для кожного $\boldsymbol{A}$-модуля N має місце ізоморфізм $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\hat{M}, \hat{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(N, M)$.

Завдання 4.

ex41 4.1. Доведіть, що послідовність $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L$ є точною тоді й лише тоді, коли існують точні послідовності

$$M \xrightarrow{\alpha'} M' \to 0,$$

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha''} N \xrightarrow{\beta'} L' \to 0,$$

$$L' \xrightarrow{\beta''} L \to 0$$

такі, що

$$\alpha = \alpha''\alpha' \text{ і } \beta = \beta''\beta'.$$

ex42 4.2. Доведіть, що

(1) функтор F є точним справа тоді й лише тоді, коли для кожної точної послідовності $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \to 0$ точною є послідовність $FM \xrightarrow{F\alpha} FN \xrightarrow{F\beta} FL \to 0$;

(2) функтор F є точним зліва тоді й лише тоді, коли для кожної точної послідовності $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L$ точною є послідовність $0 \to FM \xrightarrow{F\alpha} FN \xrightarrow{F\beta} FL$;

(3) функтор F є точним тоді й лише тоді, коли він переводить довільну точну послідовність у точну.

Вказівка: Скористайтеся результатом задачі 4.1.

Сформулуйте й доведіть аналогічні результати для контраваріантних функторів.

ex43 4.3. Доведіть, що еквівалентність категорій модулів є точним функтором.

ex44 4.4. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

(1) Модуль N скінченнопороджений.

(2) Для довільного епіку $f : \coprod_{i\in I} M_i \to N$ існує скічення підмножина $J \subseteq I$ така, що обмеження f на $\coprod_{i\in J} M$ є епіком.

Виведіть звідси, що еквівалентність категорій модулів переводить скінченнопороджені модулі у скінченнопороджені.

Завдання 5.

ex51 5.1. Нехай $\boldsymbol{A}$ — алгебра трикутних $n \times n$ матриць над полем $\Bbbk$:

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \Bbbk \right\},$$

$P_i = \boldsymbol{A}e_{ii}$ (i-й стовпчик), $P = \bigoplus_{i=1}^n m_i P_i$. Доведіть, що

(1) $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P_i, P_j) = \begin{cases} \Bbbk & \text{якщо } i \leqslant j, \\ 0 & \text{якщо } i > j. \end{cases}$

Вказівка: Якщо $f : P_i \to P_j$, то $f(e_i i) \in e_{ii} P_j$.

(2) Алгебра ендоморфізмів модуля P ізоморфна алгебрі блочних матриць вигляду

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \middle| \; A_{ij} \in \mathrm{Mat}(m_i \times m_j, \Bbbk) \right\},$$

Вказівка: Скористайтеся матричним записом гомоморфізмів прямих сум.

(3) $\boldsymbol{A}\text{-}\mathsf{Mod} \simeq \boldsymbol{B}\text{-}\mathsf{Mod}$, де $\boldsymbol{B}$ — алгебра блочно-трикутних матриць

$$\boldsymbol{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \middle| \; A_{ij} \in \mathrm{Mat}\, m_i \times m_j), \Bbbk) \right\},$$

ex52 5.2. *Добутком* множини об'єктів $\{ A_i \mid i \in I \}$ категорії $\mathscr{C}$ зветься об'єкт M, який представляє контраваріантний функтор $\prod_{i\in I} \mathscr{C}$. Такий об'єкт визначений з точністю до ізоморфізму. Пищуть $M \simeq \prod_{i\in I} M_i$.

(1) Доведіть, що $M \simeq \prod_{i\in I} M_i$ тоді й лише тоді, коли існують такі морфізми $\pi_i : M \to M_i$, що для довільного набору $f_i : X \to M_i$ існує єдиний морфізм $f : X \to M$, для якого $f_i = \pi_i f$.

(2) Доведіть, що якщо функтор F має лівий спряжений, то він переводить добутки у добутки, тобто $F \prod_{i\in I} M_i \simeq \prod_{i\in I} F M_i$.

Завдання 6.

ex61 6.1. Нехай $M_k \underset{p_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} M$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ — діаграма прямої суми, $e_k = i_k p_k$ — ідемпотенти кільця $\boldsymbol{E} = \operatorname{End} M$. Доведіть, що якщо всі об'єкти M_k локальні, то довільний ідемпотент у $\boldsymbol{E}$ спряжений з якоюсь сумою $\sum_{k\in J} e_k$, де J — підмножіна у $\{1, 2, \dots, n\}$.

ex62 6.2. Кільце $\boldsymbol{A}$ зветься *напівдосконалим*, якщо воно, як модуль над собою, розкладається у суму локальних модулів: $\boldsymbol{A} = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$. Доведіть, що кожен скінченнопороджений проективни $\boldsymbol{A}$-модуль ізоморфний прямій сумі вигладу $r_1P_1 \oplus r_2P_2 \oplus \ldots \oplus r_nP_n$. Зокрема, $P_1, P_2, \dots, P_n$ — це всі (з точністю до ізоморфізму) нерозкладні проекивні $\boldsymbol{A}$-модулі.

ex63 6.3. У припущеннях і позначеннях задачи **??**, нехай e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — ідемпотенти, які виникають з даного розкладу $\boldsymbol{A}$ (див. задачу **??**). Тоді елементи з $\boldsymbol{A}$ можна ототожнити з $n \times n$ матрицями (a_{ij}), де $a_{ij} \in e_i\boldsymbol{A}e_j \simeq \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P_j, P_i)$. Доведіть, що кожне кільце, Моріта еквівалентне $\boldsymbol{A}$ ототожнюється з кільцем блочних матриць (B_{ij}) $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, де B_{ij} — матриця розміру $r_i \times r_j$ з коефіціентами з $e_i\boldsymbol{A}e_j$. (Якшо серед P_i є ізоморфні, то деякі числа r_i можуть бути нулями — подумайте, чому й коли).

ex64 6.4.
(1) Нехай L, N — підмодулі модуля M. Побудуйте точну послідовність $0 \to L \cap N \to L \oplus N \to L + N \to 0$.
(2) Нехай I, J — такі ідеали комутативного кільця $\boldsymbol{A}$, що $I + J = \boldsymbol{A}$. Доведіть, що $I \cap J = IJ$.
(3) Нехай $\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{\, a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$, I — ідеал, породжений 3 і $1 + \sqrt{-5}$, J — ідеал, породжений 3 і $1 - \sqrt{-5}$.
(4) Перевірте, що $I + J = \boldsymbol{A}$, $I \cap J = 3\boldsymbol{A}$. Виведіть звідси, що $I \oplus J \simeq \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}$.
(5) Доведіть, що ані I, ані J не є головним ідеалом (тобто, обидва вони неізоморфні $\boldsymbol{A}$).

Це один з найпростіших прикладів неоднозначності розкладу у пряму суму нерозкладних модулів.

Завдання 7.

Корінь форми Тітса Q_Γ — це цілочисельний вектор $\mathbf{x}$, для якого $Q_\Gamma(\mathbf{x}) = 1$. Корінь зветься *додатним*, якщо всі його координати невід'ємні. Надалі ми вважаємо, що форма Тітса додатно визначена.

ex71 7.1. Доведіть, що якщо $\mathbf{x} \neq 0$, знайдеться номер i такий, що коли x'_i — це i-та координата вектора $\sigma_i \mathbf{x}$, то $|x'_i| < |x_i|$.

ex72 7.2. Доведіть, що якщо $\mathbf{x}$ — корінь форми Тітса, то або $\mathbf{x}$, або $-\mathbf{x}$ є додатним коренем.

ex73 7.3. Знайдіть корені форми Тітса сагайдака типу D_4:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 2 \\ 1 \arrow[r] & 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 3 \end{tikzcd}$$

ex74 7.4. Доведіть, що всі корені форми Тітса сагйдака типу A_n, тобто

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots \longrightarrow n\,,$$

— це вектори $\mathbf{v}_{kl}$ $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$, в яких i-та координата дорівнює 1 при $k \leqslant i \leqslant l$ і 0 інакше.

ex75 7.5. Доведіть, що якщо вершини i та j не сполучені стрілкою, то $(\sigma_i\sigma_j)^2 = 1$ (рівносильно, $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$), а якщо сполучені, то $(\sigma_i\sigma_j)^3 = 1$ (рівносильно, $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$).

Завдання 8.

ex81

8.1. Нехай $\Bbbk$ — скінченне поле з q елементами

(1) Підрахуйте кількість елементів у $\mathsf{Rep}(\mathbf{d},\Gamma)$ і $\mathsf{G}(\mathbf{d})$.
(2) Виведіть звідси, що якщо Γ — зображувально скінченний над полем $\Bbbk$, то $\mathsf{Q}_\Gamma > 0$.

ex82

8.2. Доведіть, що якщо Γ — зображувально скінченний сагайдак, V — його скінченновимірне зображення, то у просторах $V(i)$ можне вибрати такі бази, що координати матриць всіх операторів $V(\alpha)$ лежатимуть у простому підполі (тобто в $\mathbb{Q}$, якщо $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, і в $\mathbb{F}_p$, якщо $\operatorname{char}\Bbbk = p$).

ex83

8.3. Нехай V і V' — зображення сагайдака (не обов'язково скінченно зображувального) над нескінченним полем $\Bbbk$, $\mathbb{K}$ — розширення поля $\Bbbk$. Тоді V і V' можна розглядати і як зображення того ж сагайдака над полем $\mathbb{K}$ (чому?). Доведіть, що якщо $V \simeq V'$ як зображення над $\mathbb{K}$, то вони ізоморфні й як зображення над $\Bbbk$.[2]

ex84

8.4. У цій задачі $\Gamma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$ — сагайдак Кронекера, V — його зображення, $\mathbf{d} = \mathbf{dim}\, V$. Позначимо $\Gamma' = \sigma_1\Gamma$, $V' = \sigma_1^- V$.

(1) Нехай $\mathbf{d} = (n+1, n)$, де $n > 0$, V задається парою матриць $V(\alpha) = A_n$, $V(\beta) = B_n$, де
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(обидві матриці розміру $n \times (n+1)$). Доведіть, що V' задається парою A_{n-1}, B_{n-1}.
(2) Нехай $\mathbf{d} = (n, n+1)$, а зображення V задається парою матриць $V(\alpha) = A_n^\top$, $V(\beta) = B_n^\top$. Доведіть, що V' задається парою матриць $A_{n+1}^\top, B_{n+1}^\top$.

ex85

8.5. Доведіть, що якщо форма Тітса сагайдака Γ невід'ємна, то всі вектори $\mathbf{x}$, для яких $\mathrm{Q}_\Gamma(\mathbf{x}) = 0$, мають вигляд $c\boldsymbol{\delta}$, де $c \in \mathbb{R}$, а $\boldsymbol{\delta}$ — вектор з додатними цілими координатами, які не мають спільних множників. Знайдіть цей вектор для всіх розширених схем Динкіна.

[2] Це вірно і без обмежень на поле $\Bbbk$, але доведення складніше.

Бібліоґрафія

bgp [1] И.Н. Бернштейн, И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев. Функторы Кокстера и теорема Габриеля. Успехи мат. наук, 28, вып. 2 (1973) 19–33.

ag [2] Ю.А. Дрозд. Вступ до алгебричної геометрії. Львів: ВНТЛ «Класика», 2004.

dk [3] Ю.А. Дрозд, В.В. Кириченко. Конечномерные алгебры. К.: Вища школа, 1980.

rin [4] C.M. Ringel. Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. Lecture Notes Math. 1099, Springer, 1984.