МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 2, № 2 (1967), 133—138

О ЧИСЛЕ МОДУЛЕЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В РОДЕ ДЛЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. А. Дрозд, В. М. Турчин

Пусть Λ есть Z-кольцо, т. е. кольцо с единицей, аддитивная группа которого — свободная абелева конечного ранга (решетка). Напомним, что Λ-модуль называется *модулем представления*, если его аддитивная группа есть решетка. Два модуля, A и B, *принадлежат одному роду* ($A \vee B$), если для любого простого p $A_p \approx B_p$, где $A_p = A \otimes Z_p$ (Z_p — кольцо целых p-адических чисел). Из теоремы Жордана — Цассенхауза [1] следует, что для полупростого в смысле Джекобсона Z-кольца число модулей представлений в каждом роде конечно. А. В. Ройтер показал [2], что это число можно ограничить сразу для всех родов константой, зависящей только от кольца. Однако даже для простейших с точки зрения теории представлений колец нахождение этого числа связано со значительными арифметическими трудностями.

Так, если Λ — кольцо всех целых чисел некоторого конечномерного расширения поля рациональных чисел Q, то этот вопрос эквивалентен определению числа классов идеалов. Если же Λ — немаксимальное коммутативное кольцо, то информация о числе модулей в роде довольно бедна и относится в основном к главному (т. е. содержащему само Λ) роду (см., например, [3]). Еще менее изучен некоммутативный случай, где можно отметить только результаты Эйхлера [4], [5], [6] относительно максимальных колец.

1°. Мы будем рассматривать такие кольца Λ, что $\Lambda \otimes Q$ есть алгебра матриц второго порядка над Q. Аналогично [7] можно показать что любое такое кольцо изоморфно кольцу с базисом $[E,\ ae_{11},\ be_{21},\ ce_{11} + de_{21} + e_{12}]$, где a, b, c, d — натуральные числа, причем $a \mid b$, $b \mid ad$. Дадим оценку числа N модулей в главном роде для такого кольца. Λ содержит подмодуль A с базисом $[ae_{11},\ be_{21}]$. Пусть $B = \Lambda / A$. Если $X \vee \Lambda$, то $X \supset A_1$ такой, что $A_1 \vee A$, $X / A_1 = B_1 \vee B$. Кольцо множителей модуля A_1 совпадает с кольцом множителей $\Lambda (A)$ модуля A [8]. Так как A — неприводимый модуль представления, то $\Lambda (A)$ максимально и потому изоморфно кольцу $M_2 (Z)$ всех матриц второго порядка с целыми коэффициентами. Но $M_2 (Z)$, а следовательно, и $\Lambda (A)$ имеет всего один неприводимый модуль представления, поэтому $A_1 \approx A$. Аналогично, $B_1 \approx B$. Таким образом, модулю X соответствует элемент группы $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, A)$. Вычисления показывают, что $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, A) = Z/aZ$ и представление, соответствующее модулю X, имеет вид

$$ae_{11} \to \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & \frac{ad}{b} x & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad be_{21} \to \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{a} x & 0 \\ a & 0 & -cx & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{Vmatrix},$$

$$ce_{11} + de_{21} + e_{12} \to \begin{Vmatrix} c & \frac{b}{a} & 0 & 0 \\ \frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{Vmatrix},$$

где x—целочисленный параметр, определенный по $\mathrm{mod}\ a$, причем $(x, a) = 1$.

Если модули X и Y соответствуют параметрам x и y, то произвольный гомоморфизм $X \to Y$ задается матрицей

$$U = \begin{Vmatrix} u_1 - u_3 cx & -\frac{b}{a} u_3 x & -\frac{b}{a} u_2 - c \frac{u}{a} & -\frac{u}{a} \\ -\frac{ad}{b} u_3 x & u_1 & -d \frac{u}{a} & u_2 \\ au_3 & 0 & u_4 + u_3 cy & u_3 y \\ 0 & bu_3 & u_3 dy & u_4 \end{Vmatrix},$$

где $u = u_4x - u_1y + u_3cxy$, причем $u \equiv 0 \pmod a$. Поэтому $X \approx Y$ тогда и только тогда, когда найдутся u_1, u_2, u_3, u_4, удовлетворяющие этому сравнению и такие, что $\det U = \pm 1$, т. е. $u_1u_4 - u_3(bu_2 + du_3xy) = \pm 1$. Отсюда нетрудно заключить, что N не превосходит индекса $(\Phi : \pm \Phi^2)$, где Φ — мультипликативная группа классов вычетов по $\mathrm{mod}\ a$, взаимно простых с a, $\pm \Phi^2$ — ее подгруппа, порожденная квадратами и -1.

Пусть $a = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s} \cdot 2^k$ ($p_1, \ldots, p_s$ — различные нечетные простые числа). Тогда легко показать, что $(\Phi : \pm \Phi^2) = g(a) = 2^{s+\alpha}$, где $\alpha = -1$, если $k \leqslant 1$ и хотя бы одно p_i — вида $4l+3$, $\alpha = 0$, если $k = 2$ или $k \leqslant 1$ и все p_i — вида $4l+1$, $\alpha = 1$, если $k \geqslant 3$.

Аналогично можно показать, что $N \geqslant g(a_1)$, где $a_1 = (a, c, d)$. Итак, доказано

Предложение 1. *Число N модулей в главном роде для кольца Λ с базисом*

$$[E,\ ae_{11},\ be_{21},\ ce_{11} + de_{21} + e_{12}]$$

можно оценить следующим образом:

$$g(a_1) \leqslant N \leqslant g(a).$$

В частности, если $c = 0$, $a \mid d$, то $N = g(a)$.

2°. Найдем теперь число модулей в каждом неразложимом роде для кольца Ω с базисом $[E, pe_{11}, pe_{21}, pe_{12}]$, $\Omega \supset I = pM_2(Z)$, поэтому каждый Ω-модуль представления A есть расширение Ω/I-модуля A/IA с ядром IA $M_2(Z)$-модулем. $\Omega/I = k$ есть поле из p элементов, и $A/IA = k^t$ (прямая сумма k t раз). $IA = B^s$, где B — единственный неприводимый $M_2(Z)$-модуль представления. Поэтому A соответствует элемент $\alpha \in \mathrm{Ext}^1_\Omega(k^t, B^s)$. α естественно рассматривать как матрицу размера $s \times t$ с элементами из $\mathrm{Ext}^1_\Omega(k, B) = Z/pZ \oplus Z/pZ$. Если φ — автоморфизм A, то $\varphi(IA) = IA$, и потому соответствующее преобразование матрицы α индуцируется автоморфизмами B^s и k^t. $\mathrm{Hom}_\Omega(B, B) = Z$, $\mathrm{Hom}_\Omega(B_p, B_p) = Z_p$, $\mathrm{Hom}_\Omega(k, k) = k$, следовательно, автоморфизмам A (A_p) соответствует приведение α элементарными преобразованиями строк над Z (Z_p) и столбцов над k. Таким образом, описание p-адических представлений Ω сводится к одновременному приведению пары матриц над k элементарными преобразованиями. Как известно [9], в этом случае неразложимым модулям соответствуют пары матриц вида (E, F), (J, E), (T_1, T_2), (T'_1, T'_2), где E — единичная матрица, F — неразложимая клетка Фробениуса, J — вырожденная клетка Жордана, T_1 и T_2 — матрицы размера $s \times (s+1)$ вида

$$T_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

T'_i — транспонированная матрица T_i.

Аналогично, описание целочисленных представлений Ω сводится к одновременному приведению пары матриц над k элементарными преобразованиями, причем матрица, осуществляющая элементарные преобразования строк, должна иметь определитель ± 1. Всякий род однозначно определяется p-адическим представлением Ω.

Рассмотрим род, соответствующий паре матриц (E, F), где F — клетка Фробениуса с характеристическим полиномом $f^m(x)$, причем $f(x)$ неприводим над k. Если A — модуль из этого рода, то он определяется парой матриц (E, S), где $S = QFQ^{-1}$ (Q — невырожденная матрица над k). Две матрицы, Q и Q', определяют изоморфные модули тогда и только тогда, когда они лежат в одном классе смежности группы $GL(s, k)$ всех невырожденных матриц по подгруппе, порожденной матрицами с определителем ± 1 и матрицами, перестановочными с F. Фактор-группа $GL(s, k)$ по подгруппе унимодулярных матриц изоморфна мультипликативной группе k^* поля k (каждой матрице соответствует ее определитель). Если матрица P перестановочна с F, то P лежит в алгебре, порожденной матрицей F и $\det P$ есть норма P, рассматриваемой как элемент этой алгебры. Но если $K = k(\xi)$, где ξ — корень $f(x)$, то группа норм K^* совпадает с k^*. Поэтому $\det P \in k^{*m}$ и число модулей в роде, определенном парой (E, F), равно индексу $(k^* : \pm k^{*m})$.

Проведя аналогичные вычисления в оставшихся случаях, мы получим следующий результат:

Предложение 2. *Число модулей представлений в роде A для кольца Ω с базисом $[E, pe_{11}, pe_{21}, pe_{12}]$ равно* *индексу* $(k^*: \pm k^{*m})$, *где* m *есть число строк в матрице* J, T_i *или* T'_i, *если* A *определяется парой* (J, E), (T_1, T_2) *или* (T'_1, T'_2), *и* m *есть показатель степени, с которым неприводимый полином входит в характеристический полином матрицы* F, *если* A *определяется парой* (E, F).

Замечание 1. Из предложения 2 следует, что наибольшее число модулей в роде для кольца Ω равно $\frac{p-1}{2}$ при $p \neq 2$ (надо положить $m = \frac{p-1}{2}$) и 1 при $p = 2$, что в точности совпадает с оценкой, данной в [2] (замечание 3).

Замечание 2. Число модулей в главном роде для кольца Ω равно 1 при $p = 2$ или $p = 4l + 3$ и равно 2 при $p = 4l + 1$. Таким образом, полученный результат опровергает гипотезу, высказанную А. В. Ройтером (см. [2], замечание 4) о том, что число модулей в любом роде не превосходит числа модулей в главном роде.

Замечание 3. Результаты этой работы можно перенести на случай матричных колец второго порядка над произвольной областью главных идеалов R такой, что для любого простого $p \in R$ поле вычетов $k = R/pR$ удовлетворяет следующему условию: для любого натурального m индекс $(k^*: k^{*m})$ конечен. В частности, при $R = C[X]$, где C — алгебраически замкнутое поле, число модулей представлений в каждом роде для кольца Ω равно 1 (отметим, что теорема Жордана—Цассенхауза здесь места не имеет).

Авторы выражают благодарность всем участникам семинара по теории представлений Института математики АН УССР за помощь и внимание при выполнении этой работы.

Институт математики
АН УССР

Поступило
1.IV.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Curtis C. W., I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York — London, 1962.
[2] Ройтер А. В., О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду, Изв. АН СССР. Сер. матем., 30 (1966), 1315—1324.
[3] Serre J.-P., Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Sém. P. Dubreil, 1957—1958, exp. 23.

[4] E i c h l e r M., Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen Algebren, J. reine und angew. Math., **176** (1937), 192—202.
[5] E i c h l e r M., Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen, J. reine und angew. Math., **179** (1938), 227—251.
[6] E i c h l e r M., Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z., **43** (1938), 481—494.
[7] К р у г л я к С. А., Точные идеалы целочисленных матричных колец второго порядка, Укр. матем. ж., 18, № 3 (1966), 58—64.
[8] Ф а д д е е в Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 80 (1965), 145—182.
[9] Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц, М., 1953.