Завдання 1

Виконати до 29 лютого

В усіх відповідних вправах X — множина, на якій діє група G, $\Bbbk^X$ — простір функцій на X із значеннями в полі $\Bbbk$, а $\Bbbk^{(X)}$ — підпростір функцій зі скінченними носіями.

1. Доведіть, що зображення $\Bbbk^{(G)}$ ізоморфне регулярному зображенню групи G.

2. Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — зображення групи G, V^* — дуальний простір (простір лінійних функцій на V). Визначимо зображення $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ правилом $\rho^*(g)f(v) = f(\rho(g^{-1})v)$.

(1) Перевірте, що ρ^* дійсно є зображенням групи G. Воно зветься *спряженим* до зображення ρ.

(2) Доведіть, що $(\Bbbk^{(X)})^* \simeq \Bbbk^X$. Зокрема, $\Bbbk^G$ —- спряжене до регулярного зображення.

3. Нехай $D = \langle\, a, b \mid a^2 = b^n = 1,\ ab = b^{-1}a \,\rangle$ — діедральна група порядку $2n$.

(1) Знайдіть всі одновимірні зображення групи D.

(2) Перевірте, що відображення

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$$

визначає зображення ρ_k групи G над полем комплексних чисел.

(3) При яких k зображення ρ_k є звідним?

(4) При яких k і m зображення ρ_k і ρ_m ізоморфні?

4. Нехай $Q = \langle\, a, b \mid a^2 = b^2,\ a^4 = 1,\ ab = b^3a \,\rangle$ — група кватерніонів.

(1) Знайдіть всі одновимірні зображення групи Q.

(2) Перевірте, що відображення

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

визначає незвідне зображення групи Q над полем комплексних чисел.

(3) Спробуйте перенести результати цієї й попердньої вправ на групу

$$Q_n = \langle\, a, b \mid a^2 = b^n,\ a^4 = 1,\ ab = b^{n-1}a \,\rangle$$

Чому дорівнює порядок цієї групи?

5. Позначимо через $C \subseteq \Bbbk^X$ підпростір констант (постійних функцій). У припущенні, що X скінченна, а $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, знайдіть інваріантне доповнення до C у просторі $\Bbbk^X$.

Завдання 2

Виконати до 14 березня

В усіх вправах G — скінченна група порядку n і розглядаються зображення G над полем комплексних чисел. Через $\hat{G}$ позначається множина всіх попарно неізоморфних незвідних зобоажень групи G.

1. Довести, що $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$, де ρ^* — спряжене зображення, а риска вгорі позначає комплексне спряження.

2. Нехай ρ і θ такі зображення однієї розмірності, що для кожного $x \in G$ матриці $[\rho(x)]$ та $[\theta(x)]$ подібні. Доведіть, що $\rho \simeq \theta$.

3. Припустимо, що G комутативна. Тоді всі її зображення одновимірні, тобто їх можна ототожнити з відповідними характерами.

(1) Доведіть, що $\#(\hat{G}) = n$.
(2) Якщо $\chi, \theta \in \hat{G}$, визначимо їх добуток правилом $(\chi\theta)(x) = \chi(x)\theta(x)$. Перевірте, що $\chi\theta$ — теж зображення групи G і відносно цієї операції $\hat{G}$ є групою. Її звуть *групою характерів* групи G.
(3) Визначимо відображення $\gamma : G \to \hat{\hat{G}}$ правилом $\gamma(x)(\chi) = \chi(x)$ для всіх $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$. Доведіть, що γ є мономорфізмом груп, а тому є ізоморфізмом.

4. Нехай $\rho \in \hat{G}$, Z — центр G, $c = \#(Z)$, $n_0 = (G : C)$, $G^m = \underbrace{G \times G \times \ldots \times G}_{m \text{ разів}}$,

$\rho^m = \underbrace{\rho \boxtimes \rho \boxtimes \ldots \boxtimes \rho}_{m \text{ разів}}$, $\widetilde{Z}_m = \{\, (z_1, z_2, \ldots, z_m) \mid z_i \in Z,\ z_1 z_2 \ldots z_m = 1 \,\}$.

(1) Обчисліть $\dim \rho^m$ і $\#(\widetilde{Z}_m)$.
(2) Доведіть, що $\rho^m(z) = 1$ для всіх $z \in \widetilde{Z}_m$. Виведіть звідси, що $d^m \mid n n_0^m$ для кожного m.
(3) Доведіть, що $d \mid n_0$.

5. Нехай група G діє (праворуч) на скінченній множині X. Позначимо через ρ_X зображення G у просторі $\mathbb{C}^X$, а через χ_X — характер цього зображення. Нехай ρ_0 — тривіальне одновимірне зображення групи G. χ_0 — його характер. Позначимо через m_g кількість елементів $x \in X$ таких, що $xg = x$.

(1) Доведіть, що кратність $\mu(\rho_0, \rho_X)$ дорівнює кількості орбіт даної дії.
(2) Обчисліть χ_X і (χ_X, χ_0).
(3) Виведіть звідси, що кількість орбит даної дії дорівнює $\frac{1}{n}\sum_{g \in G} m_g$ (середній кількості нерухомих точок у елементів групи).

Завдання 3

Виконати до 28 березня

1. Нехай n непарне, D — діедральна група порядку $2n$, χ_k — характер зображення ρ_k групи D (див. задачу 3 із завдання 1).

(1) Перевірте, що класи суміжності групи D такі:
$\{1\}$, $\{\, b^m, b^{-m} \,\}$ $(0 < m < n/2)$, $\{\, ab^j \mid 0 \leqslant j < n \,\}$.

(2) Обчисліть значення незвідних характерів на елементах D.

(3) Виведіть звідси, що $\rho_k \otimes \rho_l \simeq \rho_{k+l} \oplus \rho_{k-l}$, якщо $k \neq l$, а $\rho_k^{\otimes 2} \simeq \rho_{2k} \oplus \rho_+ \oplus \rho_-$, де ρ_+ і ρ_- — різні одновимірні зображення.

(Зауважимо, що $\rho_k \simeq \rho_{n-k} \simeq \rho_{-k}$.)

2. Доведіть, що неабелева проста група не має нільпотетної підгрупи, індекс якої є степенем первинного числа.

3. Нехай ρ — точне зображення розмірності d групи G. Доведіть, що центр G збігається з множиною $\{\, g \in G \mid \chi_\rho(g) = d \,\}$.

4. Нехай ρ — зображення групи G.

(1) Доведіть, що функція $\Delta(g) = \det \rho(g)$ є одновимірним зображенням групи G. Отже, $G/\operatorname{Ker}\Delta$ — абелева група.

(2) Доведіть, що якщо $\Delta(g) = -1$ для якогось g, то в групі G є підгрупа індексу 2.

(3) Нехай $\#(G) = 2m$, де m непарне. Доведіть, що в групі G є підгрупа порядку m.

Порада: Знайдіть $\det \rho_{reg}(g)$, де $g^2 = 1$.

(4) Доведіть, що група порядку $2p^k q^l$, де p, q — непарні первинні числа, є розв'язною. Отже 60 — найменший порядок неабелевої простої групи.

5. Для кожного характера χ позначимо $\iota\chi = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi(x^2)$, де $n = \#(G)$ (це число зветься *індікатором* характера χ). Позначимо також $\theta(x) = \#\{\, y \mid y^2 = x \,\}$. Доведіть, що $\iota\chi = \langle \theta, \chi \rangle$, звідки $\theta(x) = \sum_\alpha (\iota\chi_\alpha)\chi_\alpha(x)$, де $\{\, \chi_\alpha \,\}$ — множина незвідних характерів групи G. Зокрема, кількість *інволюцій* (елементів порядку 2) в групі G дорівнює $\sum_\alpha d_\alpha(\iota\chi_\alpha) - 1$ (*формула Фробеніуса–Шура*).

Завдання 4

Виконати до 11 квітня

Тут M позначає A-модуль, $E = \operatorname{End}_A M$.

1. Нехай e, e' — ідемпотенти в кільці E. Довести, що $\operatorname{Hom}_A(eM, e'M) \simeq e'Ee \simeq \operatorname{Hom}_E(Ee', Ee)$. Зокрема $eM \simeq e'M$ тоді й лише тоді, коли $Ee \simeq Ee'$.

2. Довести, що якщо ідемпотенти e і e' спряжені в кільці E, то $eM \simeq e'M$. Якщо модуль M скінченної довжини, доведіть обернене твердження.

Порада: У останньому випадку доведіть спершу, що й $(1-e)M \simeq (1-e')M$.

Нехай задано діаграму Юнга $\mathscr{D}$ з n клітинами. Позначимо $\mathscr{D}_{j-}$ діаграму з $(n-1)$ клітиною, яка отримується з $\mathscr{D}$ вилученням однієї клітини в j-му рядку. Будемо також писати $\mathscr{D} = \mathscr{D}'_{j+}$, якщо $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_{j-}$.

Таблицю Юнга T назвемо *стандартною*, якщо кожен рядок і кожен стовчик є монотонно зростаючею послідовністю. Наприклад, стандартні таблиці на діаграмі Юнга, що відповідає розбиттю $2,2$ — це

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{та} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad \text{але не} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Прозначимо $d(\mathscr{D})$ кількість стандартних таблиць з діаграмою $\mathscr{D}$. Далі $\mathscr{D}$ позначає діаграми, які відповідають розбиттям числа n, а $\mathscr{D}'$ — числа $n-1$. Будемо писати $\mathscr{D}' \mid \mathscr{D}$, якщо $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_{j-}$ для деякого j.

3. Доведіть, що

(1) При фіксованій $\mathscr{D}$ маємо $\sum_{\mathscr{D}'|\mathscr{D}} d(\mathscr{D}') = d(\mathscr{D})$.

Порада: Підрахуйте кількість стандартних таблиць, в яких n стоїть на заданому місці (зверніть увагу, що це місце має бути останнім у рядку).

(2) При фіксованій $\mathscr{D}'$ маємо $\sum_{\mathscr{D}'|\mathscr{D}} d(\mathscr{D}) = (n+1)d(\mathscr{D}')$.

Порада: Застосуйте індукцією. Скористайтеся також твердженням (1), звідки $d(\mathscr{D}'_{j+}) = \sum_k d((\mathscr{D}'_{j+})_{k-})$.

(3) Виведіть звідси, що $\sum_{\mathscr{D}} d(\mathscr{D})^2 = n!$.

Порада: Застосуйте індукцію й двічі підрахуйте подвійну суму $\sum_{\substack{\mathscr{D},\mathscr{D}' \\ \mathscr{D}'|\mathscr{D}}} d(\mathscr{D}')d(\mathscr{D})$.

Впорядкуємо таблиці Юнга з однаковою діаграмою лексикографічно, читаючи їх по рядках: $T < T'$ означає, що перший з елементів таблиці T, який не збігається з відповідним елементом таблиці T', менший за нього. (У прикладі вище перша діаграма менша за другу). Позначимо $S(\mathscr{D})$ множину всіх стандартних таблиць Юнга з діаграмою $\mathscr{D}$.

4. (1) Доведіть, що якщо $T < T'$, то $T \vdash T'$, а тому $e(T)e(T') = 0$.

(2) Виведіть звідси, що з рівності $\sum_{T\in S(\mathscr{D})} a_T e(T) = 0$, де $a_T \in \Bbbk G$, то всі $a_T = 0$, а тому $\Bbbk G$ містить пряму суму $\bigoplus_{T\in S(\mathscr{D})} M_T$, де $M_T = (\Bbbk G)e(T)$.

5. Доведіть, що $\dim M_T = d(\mathscr{D}(T))$.

Порада: З попередньої вправи випливає, що $\dim M_T = \mu(M_T, \Bbbk G) \geqslant d(\mathscr{D}(T))$. Залишається скористатися вправою 3 (3).