Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків (Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна)

Оцінки зверху деяких додатних інтегралів

Нехай $\ell_2^+ = \{x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots) \colon x_j \geq 0 (j \in \mathbb{N}), \sum\limits_{j=1}^{+\infty} x_j^2 < +\infty\}$, ν — зліченно-адитивна міра на ℓ_2^+, а $F \colon \ell_2^+ \to \mathbb{R}_+$ — функція, зображувана інтегралом вигляду

$$F(\sigma) = \int\limits_{\ell_2^+} f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} d\nu(x), \sigma \in \ell_2^+,$$

де $\langle \sigma, x \rangle = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \sigma_j x_j$ для $\sigma, x \in \ell_2^+,\ f(x) \geq 0 (x \in \ell_2^+)$.

Нехай $\operatorname{supp} \nu$ — носій міри ν. Для $x \in \ell_2^+$ визначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} \colon x \in \ell_2^+\}.$$

Нехай крім цього $\tau = P \times \mathrm{meas}$, — зліченно-адитивна міра, визначена на ℓ_2^+, що є прямим добутком ймовірнісної міри P на $S = \{x \in \ell_2^+ \colon \|x\| = 1\}$ та міри Лебега meas на $\mathbb{R}_+$. Тут $\|x\| = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} x_j^2$. Зауважимо, що $\tau(\ell_2^+) = +\infty$. Нехай також $|x| = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} x_j$, зокрема $|x| = +\infty$, якщо відповіднй ряд для $x \in \ell_2^+$ є розбіжний.

Через $\gamma(F) = \{x \in \ell_2^+ \colon \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln F(tx)}{t} = +\infty\}$ позначимо конус зростання F, а через L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \uparrow +\infty (t \to +\infty)$, $\int\limits^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$.

Теорема. Нехай міра ν задовольняє умову

$$\exists \psi \in L \colon \nu\{x \in \ell_2^+ \colon t - \sqrt{\psi(t)} < |x| < t + \sqrt{\psi(t)}\} \leq A (t \geq t_0).$$

Тоді для кожного дійсного конуса K з вершиною в точці $O = (0, 0, \ldots)$ такого, що $\overline{K} \backslash \{O\} \subset \gamma(F)$ і $\overline{K} \cap S$ — компакт, існує вимірна множина $E \subset \ell_2^+$ така, що при $\|\sigma\| \to +\infty$ $(\sigma \in K \backslash E)$ виконується

$$F(\sigma) \leq (1 + o(1)) \mu_*(\sigma, F),$$

причому $\tau(E) < +\infty$.