К.М. Жигалло, Ю.І. Харкевич (Волин. нац. ун-т, Луцьк, Україна)

Про наближення спряжених диференційовних функцій бігармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$. Через W_∞^r позначимо множину 2π–періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$–го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \le 1$;

$$\overline{W}_\infty^r = \left\{ \bar{f} : \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,\ f \in W_\infty^r \right\}$$

— клас функцій, спряжених до функцій з класу W_∞^r.

Метою роботи є відшукання точного значення величини

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; B_\delta\right)_C = \sup_{f\in\overline{W}_\infty^r} \|f(x) - B_\delta(f,x)\|_C, \qquad (1)$$

де $B_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right] e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right) dt$, $\delta > 0$, – бігармонійний інтеграл Пуассона [1, 2].

Далі, $K_n = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}$, $n \in N$, — відомі константи Ж. Фавара – Н. І. Ахієзера – М. Г. Крейна з теорії найкращих наближень.

Задача про відшукання асимптотичних рівностей для величин типу (1) на різних класах диференційовних функцій досліджувались багатьма авторами [1, 2].

Теорема. *Якщо $r = 2l, l \in N$, то при кожному $\delta > 0$ мають місце рівності*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r, B_\delta\right)_C = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{(2i-1)!} K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}} \frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}} +$$

$$+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=0}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i-1}\frac{1}{\delta^{2i}}\right) - \alpha_\delta^{(r)} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\alpha_\delta^{(r-1)},$$

де

$$\alpha_\delta^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1dt_2\ldots dt_n.$$

В роботі також отримано результати для випадку $r = 2l+1, l \in N$.

[1] Каниев С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995–998.

[2] Pych P. On a biharmonic function in unit disc// Ann. pol. math. — 1968. — **20**, № 3. — P. 203–213.