*В.Ф. Журавлев* (Житомирский национальный агроэкологический университет, Украина)

## Условия разрешимости и представление решений нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве

Рассмотрим операторное уравнение $Lx = y$, где $L-$ линейный ограниченный нормально разрешимый оператор, действущий из банахова пространства $\mathbf{B_1}$ в банахово пространство $\mathbf{B_2}$. Пусть ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ оператора $L$ дополняемы в банаховых пространствах $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$, соответственно. Это значит [1], что оператор $L$ обобщенно обратим и существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ в прямые топологические суммы $\mathbf{B_1} = N(L) \oplus X$, $\mathbf{B_2} = Y \oplus R(L)$.

Обозначим через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B_1} \to Y_1 \subseteq Y$, оператор являющийся расширением на пространство $\mathbf{B}_1$ оператора, который осуществляет изоморфизм $N_1(L) \subseteq N(L)$ на $Y_1 \subseteq Y$, а через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B_2} \to N_1(L) \subseteq N(L)-$ оператор, являющийся расширением оператора обратного изоморфному на все пространство $\mathbf{B}_2$.

Пусть $\Theta(M_1, M_2)-$ раствор подпространств $M_1$ и $M_2$ банахового пространства $\mathbf{B}$. Известно [2], что если $\Theta(M_1, M_2) < \frac{1}{2}$, то $dim M_1 = dim M_2$.

Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *имеет ограниченный обратный*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - & \text{левый, если} \quad \theta(N_1(L), N(L)) < \frac{1}{2}, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_r^{-1} - & \text{правый, если} \quad \theta(Y_1, Y) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — линейный ограниченный нормально разрешимый оператор, ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ которого дополняемы в банаховых пространствах $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ соответственно. Тогда оператор $L^- = \overline{L}_{l,r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$ является ограниченным обобщенно обратным [3] к оператору $L$.*

**Теорема 2.** *Операторное уравнение $Lx = y$ разрешимо для тех и только тех $y \in B_2$, для которых выполнено условие $\mathcal{P}_Y y = 0$ и при этом имеет семейство решений, представимое в виде суммы $x = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + L^- y$, первое слагаемое которой — общее решение соответствующего однородного уравнения $Lx = 0$, а второе — частное решение неоднородного операторного уравнения $Lx = y$ , $\hat{x}-$ произвольный элемент пространства $\mathbf{B_1}$.*


[1] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах и индексах линейных операторов //УМН. – 1957. – **12**, в. 2. – С. 43 – 118.

[3] *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.