Ю.В. Жерновий (Національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна)

Розподіл часу перебування у вільному стані для системи обслуговування GI/G/1/0

Вивчатимемо одноканальну систему обслуговування з відмовами, на вхід якої надходить стаціонарний ординарний потік замовлень, а випадкові величини T_λ (час між моментами надходження замовлень) і T_μ (час обслуговування одного замовлення) незалежні і довільно розподілені.

Якщо функції розподілу випадкових величин T_λ і T_μ абсолютно неперервні, то згідно з [1, с. 238] щільність розподілу випадкової величини $T_{\mu+0} = T_\mu + T_0$ – інтервалу часу між потрапляннями замовлень у вільну систему можна визначити за формулою

$$p_{\mu+0}(t) = p_\lambda(t)F_\mu(t) + \int_0^t \int_0^\tau h_\lambda(y)p_\mu(\tau)p_\lambda(t-y)\,dy\,d\tau,$$

де T_0 – час перебування системи у вільному стані; $p_\lambda(t)$, $p_\mu(t)$, $p_{\mu+0}(t)$ – щільності розподілу випадкових величин T_λ, T_μ і $T_{\mu+0}$ відповідно; $h_\lambda(t)$ – щільність функції відновлення для випадкової величини T_λ; $F_\mu(t)$ – функція розподілу випадкової величини T_μ .

Припустимо, що $p_\lambda(t) \neq 0$, $p_\mu(t) \neq 0$ $\forall$ $t \in [0, \infty)$, а $p_0(t)$ – щільність розподілу випадкової величини T_0. Нехай функції $q_\mu(t) = dp_\mu(t)/dt$, $q_{\mu+0}(t) = dp_{\mu+0}(t)/dt$ – кусково неперервні $\forall$ $t \in [0, \infty)$, і $p_\mu(0) \neq 0$. Тоді, продиференціювавши обидві частини формули згортки для щільностей розподілу випадкових величин T_μ і T_0 за змінною t, одержимо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $p_0(t)$:

$$p_\mu(0)p_0(t) + \int_0^t q_\mu(t-\tau)p_0(\tau)\,d\tau = q_{\mu+0}(t). \tag{1}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$p_0(t) = \frac{q_{\mu+0}(t)}{p_\mu(0)} - \frac{1}{p_\mu(0)}\int_0^t R_\mu(t-\tau)q_{\mu+0}(\tau)\,d\tau.$$

Тут $R_\mu(t)$ – резольвента ядра $q_\mu(t-\tau)$ рівняння (1), яку можна знайти або за допомогою перетворення Лапласа, застосувавши його до обидвох частин рівняння (1), або методом ітерованих ядер: $R_\mu(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_\mu^{(k)}(t)$, де $q_\mu^{(k)}(t)$ – k-разова згортка функції $q_\mu(t)$, $q_\mu^{(1)}(t) = q_\mu(t)$.

Знайдено $p_0(t)$ також для випадку регулярного вхідного потоку.

[1] Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. М., Турбин А. Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. — Кишинев: Штиинца, 1991.