*В.П. Заставный* (Донецкий национальный университет, Донецк, Украина)

## Положительно определенные функции специального вида

Пусть $E$ - вещественное линейное пространство, а $\Phi(E)$ - множество всех положительно определенных на $E$ функций. Функция $f \in C^{\infty}_{(0,+\infty)}$ называется вполне монотонной на $(0,+\infty)$ (пишем $f \in M_{(0,+\infty)}$), если для всех $x>0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$.

**Теорема 1** *Пусть $h \in C(E)$ и $h(t)>0$ $\forall t \in E$. Тогда при любом $d \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:*

1. $K(x,t) := (h(t))^{-\frac{d}{2}} \varphi\left(\frac{||x||_2^2}{h(t)}\right) \in \Phi(\mathbb{R}^d \times E)$ $\ \forall \varphi \in C_{[0,+\infty)} \bigcap M_{(0,+\infty)}$ .
2. $e^{-\lambda h(t)} \in \Phi(E)$ $\forall \lambda > 0$.

Приведём примеры функций $h$ для которых выполнено условие 2 в теореме 1.

**Пример 1** Пусть $h(t) = ||t||_p^{\alpha} + c$, $c>0$, $0<p\leq +\infty$, $\alpha \geq 0$, $t=(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, где $||t||_p^p = \sum_{k=1}^n |t_k|^p$, $0<p<\infty$, и $||t||_\infty = \sup_{1\leq k\leq n}|t_k|$. Тогда

$$e^{-\lambda h(t)} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \ \forall \lambda>0 \iff e^{-||t||_p^{\alpha}} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff 0 \leq \alpha \leq \alpha(l_p^n) \ ,$$

где

$$\alpha(l_p^n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n=1,\ 0<p\leq\infty; \\ p, & \text{если } n\geq 2,\ 0<p\leq 2; \\ 1, & \text{если } n=2,\ 2<p\leq\infty; \\ 0, & \text{если } n\geq 3,\ 2<p\leq\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Для $0<p\leq 2$ это результат Шенберга. При $p=\infty$, $n\geq 3$ это результат Мисиевич (1988). При $2<p\leq\infty$, $n\geq 2$ этот результат независимо был получен в 1991 Колдобским и Заставным.

**Пример 2** Если $\rho(t)$ - норма в $\mathbb{R}^2$, то $e^{-\lambda h(t)} \in \Phi(\mathbb{R}^2)$ $\forall \lambda>0$, где $h(t) = \rho^{\alpha}(t)+c$, $0\leq\alpha\leq 1$, $c>0$. Это хорошо известный факт.

**Пример 3** Пусть $\psi(s) \in \mathbb{R}$ $\forall s>0$. Тогда $e^{-\lambda\psi} \in M_{(0,+\infty)}$ $\forall \lambda>0 \iff \psi' \in M_{(0,+\infty)}$. Это хорошо известный факт. Поэтому, если $\psi \in C_{[0,+\infty)}$, $\psi(s)>0$ $\forall s\geq 0$, и $\psi' \in M_{(0,+\infty)}$, то $e^{-\lambda h(t)} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ для всех $\lambda>0$, $n\in\mathbb{N}$, где $h(t) := \psi(||t||_2^2)$ и, значит,

$$K(x,t) := (\psi(||t||_2^2))^{-\frac{d}{2}} \varphi\left(\frac{||x||_2^2}{\psi(||t||_2^2)}\right) \in \Phi(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n) \ \forall \varphi \in C_{[0,+\infty)} \bigcap M_{(0,+\infty)} \, , \, d \in \mathbb{N} \, .$$

Последнее утверждение в 2002 доказал Gneiting.

**Пример 4** Пусть $g \in \Phi(E)$, $g(-t) = g(t)$ для всех $t \in E$ и $h(t) := g(0) - g(t) + c$, $c>0$. Тогда $h(t)>0$ $\forall t \in E$ и $e^{-\lambda h(t)} \in \Phi(E)$ для всех $\lambda>0$. Это следует из теоремы Шенберга об отрицательно определенных функциях.