М.Ш.Шабозов (Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан); *Г.А.Юсупов* (Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан)

Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение

В докладе дается обобщение неравенство А.А.Лигуна [1] между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 с конечной нормой $\|f\|_{L_2} := \|f\|_2 = (\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2dx)^{1/2} < \infty$. Приведены некоторые приложения полученного неравенство. Для некоторых классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, вычислены точные значения различных n-поперечников в пространстве L_2 [2]. Пусть $\Im_{n-1} = \{T_{n-1}(x) : T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\}$, $E_n(f)_2 := \inf\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \Im_{n-1}\}$. Равенством $\omega_m(f;t)_2 \overset{def}{=} \sup\{\|\triangle_h^m f(\cdot)\|_2 : \ |h| \le t\}$, где $\triangle_h^m f(x)$ - разность m-го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h, определим модуль непрерывности m-го порядка. Введем следующую экстремальную характеристику

$$\chi_{m,n,r,p}(q;h) = \sup\{2^{m/2}n^{r-\frac{1}{p}}E_n(f)_2\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t/n)_2 q(t)dt\right)^{-1/p} : f \in L_2^r;\ f^{(r)} \ne const\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ r \ge 1,\ 1/r < p \le 2$ *и* $q(t) \ge 0, 0 < t < h \le \pi$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\{\Phi_{m,r,p}(q,h,1)\}^{-1/p} \le \chi_{m,n,r,p}(q;h) \le \left\{\inf_{x\ge1}\ \Phi_{m,r,p}(q,h,x)\right\}^{-1/p},$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(q,h,x) = x^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp/2}\, q(t)dt.$$

При этом, если функция $q(t)$ $(0 \le t \le h)$ *такова, что*

$$\inf\{\Phi_{m,r,p}(q,h,x) : x \ge 1\} = \Phi_{m,r,p}(q,h,1),$$

то справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(q;h) = \{\Phi_{m,r,p}(q,h,1)\}^{-1/p}.$$

Следствие. *Пусть* $\varphi(t)=\sin^{\gamma}(\beta t/h)$, $0<t\le h\le\pi/n$, $0<\beta\le\pi$, $0\le\gamma\le$ $\le rp-1$, $1/r<p\le 2$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, $r\ge 1$. *Тогда при всех* $m,n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\chi_{m,n,r,p}\left(\sin^{\gamma}(\beta t/h);h\right)=2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_{0}^{h}\left(\sin\left(nt/2\right)\right)^{mp}\sin^{\gamma}\left(\beta t/h\right)dt\right\}^{-1/p}.$$

Пусть $\Phi(u)$ - произвольная непрерывная возрастающая при $u\ge 0$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. При любых $m,n\in\mathbb{N}, 0\le\gamma\le rp-1, 1/r<p\le 2$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, $r\ge 1$, $0<\beta h\le\pi$ и любом $u\in(0,\pi]$, определим класс функций

$$W_{m}^{r}(\Phi)_{p}=\left\{f(x)\in L_{2}^{r}:\ \int\limits_{0}^{u}\omega_{m}^{p}(f^{(r)};t)_{2}\sin^{\gamma}\frac{h}{u}\beta t dt\le\Phi^{p}(u)\right\}.$$

Теорема 2. *Если при всех* $u\in(0,\pi], 0<h\le\pi/n$ *функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^{p}(h)\int\limits_{0}^{u}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_{*}^{mp}\sin^{\gamma}\frac{h}{u}\beta t dt\le\Phi^{p}(u)\int\limits_{0}^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\beta t dt, \tag{1}$$

то справедливо равенство

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=\gamma_{2n}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=E_{n}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=$$

$$=2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_{0}^{h}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\sin^{\gamma}\beta t dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \tag{2}$$

где $\gamma_k(\cdot)$ *- любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$*-бернштейновский,* $d^k(\cdot)$*-гельфандовский,* $d_k(\cdot)$*-колмогоровский,* $\lambda_k(\cdot)$*-линейный,* $\pi_k(\cdot)$*-проекционный.*

В частности, при $h=\pi/n$, $\beta=n$ *из (2) следует, что*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=\gamma_{2n}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=E_{n}\left(W_{m}^{r}(\Phi)_{p},L_{2}\right)=$$

$$=2^{-(m+\frac{\gamma}{p})}n^{-r+\frac{1}{p}}B^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{mp+\gamma+1}{2},\frac{\gamma+1}{2}\right)\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $B(a,b)$ *- бета-функция Эйлера.*

Отметим, что класс мажорантных функций $\Phi(t)$, для которых выполняются условие (1), не пусто.

[1] А.А.Лигун "Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2", Мат. заметки, 24:6 (1978), 785-792.

[2] М.Ш.Шабозов, О.Ш.Шабозов "О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$", ДАН РТ, 49:2, (2006), 111-115.