Л.Г. Євсеєва (Полтавський університет споживчої кооперації України)

Інтервальне моделювання оптимізаційних задач розміщення

Подається концепція інтервального математичного моделювання в геометричному проектуванні [1] як математичного моделювання з урахування похибок вихідних даних задачі на основі використання інтервальної геометрії [2], нового додатку інтервального аналізу в геометричному проектуванні, започаткованого Ю.Г. Стояном у 1992 році.

Побудова інтервальної математичної моделі оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів передбачає інтервальне математичне моделювання геометричних об'єктів, що розміщуються, та області розміщення; побудову області допустимих значень інтервальним моделюванням обмежень на взаємодії об'єктів розміщення на основі використання інтервальних $\mathbf{\Phi}$- відображень [3], які є аналогами Φ- функцій [1]; а також побудову інтервального критерія $\mathbf{F}$ якості розміщення як інтервального відображення.

Інтервальна математична модель загальної оптимізаційної задачі розміщення інтервальних об'єктів $\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle) = \operatorname{int}\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle) \bigcup \mathbf{fr}\,\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle) \subset \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, $k \in J_n$, в інтервальній області $\mathbf{\Omega}(\langle U_0\rangle) = \operatorname{int}\mathbf{\Omega}(\langle U_0\rangle) \bigcup \mathbf{fr}\,\mathbf{\Omega}(\langle U_0\rangle) \subset \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, $\mathbf{I}_s^m\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I}_s\mathbf{R}\times\mathbf{I}_s\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{I}_s\mathbf{R}}_{m}$, є такою

$$\mathbf{F}(\langle U\rangle) \to extr, \tag{1}$$
$$\langle U\rangle = (\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle, \ldots, \langle U_n\rangle) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{I}_s^q\mathbf{R}, q = m\cdot n,$$

$\mathbf{D}$– інтервальна область допустимих розв'язків, що описується системою інтервальних нерівностей виду

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_{0k}(\langle U_0\rangle, \langle U_k\rangle) - \mathbf{\rho}_{0k}^- \geq \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{\Phi}_{0k}(\langle U_0\rangle, \langle U_i\rangle)} + \mathbf{\rho}_{0k}^+ \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle, \langle U_j\rangle) - \mathbf{\rho}_{ij}^- \geq \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle, \langle U_j\rangle)} + \mathbf{\rho}_{ij}^+ \geq \mathbf{0}, \end{cases} \tag{2}$$

$\forall i < j \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall k \in J_n$, $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\overline{\langle X\rangle} = \overline{\langle x, \nu_x\rangle} = \langle x, -\nu_x\rangle$ – спряження елемента $\langle X\rangle = \langle x, \nu_x\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{F}$ – інтервальне відображення $\mathbf{F}: \mathbf{I}_s^q\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{D}$– інтервальна область допустимих розв'язків задачі $(\mathbf{D} \neq int\,\mathbf{D}, \mathbf{D} \neq cl\,\mathbf{D})$, $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$– розширений простір центрованих інтервалів [2], $\mathbf{\rho}_{ij}^-$, $\mathbf{\rho}_{ij}^+$, $\mathbf{\rho}_{0i}^-$, $\mathbf{\rho}_{0i}^+$ – мінімальні і максимальні допустимі інтервальні відстані між об'єктами, що розмішуються, об'єктами і областю розміщення відповідно згідно введеної метрики (евклідової чи інтервальної), $\mathbf{\Phi}_{ij}(\langle U_i\rangle, \langle U_j\rangle)$, $\mathbf{\Phi}_{0k}(\langle U_0\rangle, \langle U_k\rangle)$ – інтервальні $\mathbf{\Phi}$- відображення пари інтервальних об'єктів $\mathbf{S}_i(\langle U_i\rangle)$ та $\mathbf{S}_j(\langle U_j\rangle)$ і інтервального об'єкта $\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)$ та топологічного доповнення $\mathbf{\Omega}^*(\langle U_0\rangle) = (\mathbf{I}_s^m\mathbf{R} \setminus cl\,\mathbf{\Omega}(\langle U_0\rangle)) \bigcup \mathbf{fr}\,\mathbf{\Omega}(\langle U_0\rangle)$ до усієї $\mathbf{\Omega}$.

Досліджуються прикладні аспекти інтервального математичного моделювання. Так, в в порошковій металургії запропоновано імітаційне інтервальне моделювання властивостей сплаву в залежності від розмірів гранул порошку [4]. Інтервальна математична модель задачі оптимізації кількості порошку, потрібного для досягнення певного рівня пористості сплаву з порошкових матеріалів при виготовленні виробу з антифрикційних матеріалів має вигляді

$$\mathbf{\Gamma}(\langle U\rangle) = \langle \gamma, \nu_\gamma\rangle = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\langle U_k\rangle) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_1(u_k), \sum_{k=1}^{n} f_2(\nu_{u_k}) \right\rangle \to \min, \tag{3}$$

де

$$f_1(u_k) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mathbf{p}_3(\,\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)) \subset \mathbf{p}_3(\mathbf{D}) \\ 0, \text{ якщо } \mathbf{p}_3(\,\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)) \not\in \mathbf{p}_3(\mathbf{D}), \end{cases} \quad f_2(\nu_{u_k}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mathbf{q}_3(\,\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)) \subset \mathbf{q}_3(\mathbf{D}) \\ 0, \text{ якщо } \mathbf{q}_3(\,\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)) \not\in \mathbf{q}_3(\mathbf{D}), \end{cases}$$

$\langle U\rangle = (\langle U_1\rangle, \langle U_2\rangle, ..., \langle U_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^{3n}\mathbf{R}, \quad \langle U_k\rangle = \langle u_k, \nu_{u_k}\rangle = (\langle X_k\rangle, \langle Y_k\rangle, \langle Z_k\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}, \quad \forall k \in J_n$, $\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ – інтервальна куля (математична модель гранули порошку), $\mathbf{D}(\langle U_0\rangle) \subset \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ – інтервальна циліндрична область (математична модель циліндричної області розміщення), яка визначається за (2) при $\boldsymbol{\rho}_{ij}^- = \boldsymbol{\rho}_{ij}^+ = \boldsymbol{\rho}_{0k}^- = \boldsymbol{\rho}_{0k}^+ = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{p}_3(\langle U\rangle) = (x, y, z) \in R^3$, $\mathbf{r}_3(\langle U\rangle) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) \in R^3$, $\langle U\rangle = (\langle X\rangle, \langle Y\rangle, \langle Z\rangle) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Інтервальна оптимізаційна задача (3) розглядається як послідовність оптимізаційних задач упакування інтервальних куль $\mathbf{S}_k(\langle U_k\rangle)$, $\forall k \in J_n$, в інтервальну циліндричну область $\mathbf{\Omega}$ з інтервальним критерієм якості

$$\boldsymbol{\kappa}_k(\langle \tilde{U}\rangle) = \inf_{(\langle U\rangle, \langle H\rangle) \in \tilde{\mathbf{D}} \subset \mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}} \langle H_k\rangle, \ \forall k \in J_n, \tag{4}$$

де $\langle H_k\rangle$ – інтервальна висота зайнятої частини області $\mathbf{\Omega}$ після розміщення в ній $\mathbf{S}_k$.

Кожна з k, $k \in J_n$, перетворюється до двокритеріальної оптимізаційної задачі через занурення [4] в евклідів простір. В результаті розв’язання задачі (3) одержуємо інтервал, в який гарантовано влучає значення функції цілі поставленої задачі.

Сформульовано умови еквівалентності задач оптимізації в інтервальному та евклідовому просторі. Аналіз результатів дослідження доводить доцільність та ефективність інтервального математичного моделювання.

1.Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.

2.Стоян Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію: Навч. посіб. – Х.: ХНУРЕ, 2006. – 98 с.

3.Evseyeva L. Modelling of Interaction of the n-D Spheres withing Interval Spaces / L. Evseyeva, T. Romanova, I. Grebennik // Telecommunications and Radio Engineering. – 2007. – V. 66, N 3. – P. 273–281.

4.А. с. Україна. Комп’ютерна програма “Имитационное моделирование свойств сплава” / Ю.Г. Стоян, Л.Г. Євсеєва, Г.Н. Яськов. – № 27362; опубл. 23.01.09.