Яницька Л.М. (Київський торгово-економічний ун-т, Київ, Україна.)

Редукція нелінійних крайових умов дифузійної задачі до рівнянь з псевдо диференціальним оператором.

Доповідь починається з модельного дифузійного рівняння $u_t = u_{xx}$ і множини періодичних розв'язків (нижні індекси x і t означають диференціювання)

$$e_k e^{\omega\kappa x} \ (\omega_k = \omega\sqrt{k},\, e_k = \{\sin\theta_k, \cos\theta_k\},\, \theta_k = \omega_k x + 2\omega_k^2 t\ ,\ \ x < 0\ ). \quad (1)$$

На поверхні $x = 0$ розв'язки становлять повну систему вектор-функцій, за якими загальний розв'язок u з періодом $T = \pi / \omega^2$ можна представити рядом Фур'є і тоді

$$u = \sum u_i e_i \to Bu = u_x = \sum u_i A' e_i / 2\omega_i :\ u_i \to u_i \frac{E - I}{2\omega_i} = b_i, \quad (2)$$

де фігурують 2-векторні коефіцієнти Фур'є u_i і 2 x 2 –матриці (одинична E і «уявна» $I = A - E$) .

Оператор B визначений на множині T- періодичних функцій в $L_2(T)$, додатній, породжує енергетичну норму ліувілевського типу $L_2^{1/4}(T)$. Обернений до B оператор Γ породжує енергетичний простір H', спряжений до H, комутує з операцією $\partial / \partial t$ і разом з B має інваріантні підпростори з евклідовою базою $\{e_k, e_k'\}$.

Приведені результати дають підстави розглядати крайову умову дифузійної задачі в якості рівняння $u_x + hu = b(t) + \varepsilon f(t,u)$. Відома інтенсивність опромінювання поверхні $x = 0$ виражається періодичною функцією $b(t_0)$ і задає частоту ω і розв'язок u_0, при $\varepsilon = 0$.

Пошук нев'язки v зводиться до розв'язування одного з рівнянь

$$Bv + hv = \Gamma v_t + hv = \varepsilon f(t, u_0 + v). \quad (3)$$

Останнє з них еволюційне і містить псевдо диференціальний оператор $B = \Gamma^{-1}$. Ця обставина, на жаль, не позбавила задачу від „ параболічної спадковості” в рівнянні (3).

Ситуація покращиться, якщо обмежитись інваріантним підпростором $\{e_k, e_k'\}$. В цьому випадку розв'язок v представляється у вигляді k-ї складової ряду Фур'є, зокрема $Ce e^{\omega x}$
Оператор Γ також вироджується до двовимірного

$$\Gamma v = \int_{-\infty}^{0} v\,dx = \frac{C}{2\omega} A' e - \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{0} C_x A' e e^{\omega k} dx = C \frac{e - e'}{2\omega} \quad (e' \cdot e) = 0. \quad (4)$$

Заміна скалярної невідомої $v(x,t)$ векторною $C(x,t)$ дає можливість анулювати останній інтеграл в (4), як додаткову умову і тоді (3) набирає вигляду звичайного дифрівняння

$$C_t + CD = \varepsilon\omega f\, e A + r e A', \quad (D = \omega h E + (2\omega^2 + h\omega) I\ . \quad (5)$$

Порівняння розв'язків (3) і (5) підказує, що ортогональна нев'язка r підпорядкована f, а варіація амплітуд першої гармоніки при нелінійному збуренні f характеризується „повільними” змінними і евклідовим представленням оператора Γ в просторі (e, e').