Л.А. Янович (Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь)

Интерполяционные формулы для функций многих матричных переменных

Рассматриваются задачи построения интерполяционных многочленов, сходимость интерполирования и оценки погрешности в классах функций многих матричных переменных. Теория интерполирования таких функций в настоящее время еще мало разработана. Хотя функции от матриц находят применение как в самой математике, так и во многих прикладных науках.

Пусть $F(A)=F(A_1,A_2,...,A_n)$ – функция от n-матричных переменных $A_1,A_2,...,A_n$, $B_k=(B_{1k},B_{2k},...,B_{nk})$ – узлы интерполирования $(k=0,1,...,m)$. Введем для векторов $(A_1-B_{\nu 1},A_2-B_{\nu 2},...,A_n-B_{\nu n})$ и $(B_{\nu 1}-B_{k1},B_{\nu 2}-B_{k2},...,B_{\nu n}-B_{kn})$ их «скалярное» произведение

$$(A-B_\nu,B_k-B_\nu)=\sum_{i=1}^{n}(A_\nu-B_{\nu i})(B_{ki}-B_{\nu i}) \quad (1\le \nu,k\le m).$$

Тогда для алгебраического матричного многочлена

$$L_m(A)=\sum_{k=0}^{m} l_k(A)\, l_k^{-1}(B_k)F(B_k),$$

где

$$l_k(A)=(A-B_0,B_k-B_0)...(A-B_{k-1},B_k-B_{k-1})(A-B_{k+1},B_k-B_{k+1})...(A-B_n,B_k-B_n)$$

при условии, что обратные к $l_k(B_k)$ матрицы $l_k^{-1}(B_k)$ для $k=0,1,...,m$ существуют, выполняются интерполяционные условия

$$L_m(B_k)=F(B_k) \quad (k=0,1,...,m).$$

Если в качестве узлов интерполирования взять векторы

$$B_i=(\beta_{1i}I+H_1,\beta_{2i}I+H_2,...,\beta_{ni}I+H_n) \quad (i=0,1,2),$$

где числа $\beta_{\nu i}$ таковы, что $\beta_{\nu i}-\beta_{\nu j}\ne 0$ для $i\ne j$, а I – единичная матрица и произвольные матрицы H_ν $(\nu=1,2,...,n)$ той же размерности, что и компоненты матрицы A, то имеют место следующие формулы линейной и квадратичной интерполяции:

$$L_1(A)=F(B_0)+\frac{(A-B_0,B_1-B_0)}{(\beta_1-\beta_0,\beta_1-\beta_0)}\left[F(B_1)-F(B_0)\right],$$

$$L_2(A)=L_1(A)+\left[F(B_2)-L_1(B_2)\right]\frac{(A-B_0,B_2-B_0)(A-B_1,B_2-B_1)}{(\beta_2-\beta_0,\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1,\beta_2-\beta_1)}.$$

Также построены интерполяционные формулы другой структуры и для различных классов матричных узлов, в том числе для функций, заданных на множествах функциональных матриц.

Многие вопросы теории функций от матриц и ее приложения к решению дифференциальных уравнений изложены в [1]. Ряд интерполяционных формул для функций от одной матричной переменной содержится в [2].

[1] Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ─ М.: ГИТТЛ , 1957.
[2] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. ─ Киев: Наукова думка, 2000.