Е.А.Вознюк (Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p_0(t)\varphi_0(y) + \alpha_1 p_1(t)\varphi_1(y) + \alpha_2 p_2(t) e^{\gamma(y)} \varphi_2(y) \qquad (1)$$

где $\alpha_i \in \{-1;1\}$ $(i = 0,1,2)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i = 0,1,2)$ − непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_i :]0, y_0] \to]0,+\infty[$ $(i = 0,1,2)$ $(0 < y_0 < +\infty)$ − правильно меняющиеся, непрерывные функции, порядка $0, \sigma_1, \sigma_2$ соответственно, такие, что

$$\lim_{y\downarrow 0} \varphi_0(y) = \varphi_0^0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \lim_{y\downarrow 0} \varphi_i(y) = \begin{cases} \text{ëèáî} & 0, \\ \text{ëèáî} & +\infty \end{cases} \quad (\text{ãäå } i = 1,2),$$

а $\gamma :]0, y_0] \to]-\infty,+\infty[$ − дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{y\downarrow 0} y\gamma'(y) = \infty, \quad \lim_{y\downarrow 0} \frac{\gamma''(y)}{\gamma'^2(y)} = 0.$$

Решение $y : [t_0, \omega[\to]0, y_0]$ $(t_0 \in [a, \omega[)$ уравнения (1) будем называть $\text{Ï}_\omega^0(\mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = 0; \qquad y'(t) < 0 \ \text{ ïðè } \ t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{ëèáî} & 0, \\ \text{ëèáî} & +\infty; \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \ \text{ где } \ \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{åñëè } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{åñëè } \omega < +\infty. \end{cases}$$

При отсутствии первых двух слагаемых уравнение (1) ранее рассматривалось в [2], а при отсутствии третьего – в [1].

В настоящей заметке для уравнения (1) выделяется случай, когда на каждом Ï_ω-решении первое слагаемое в правой части уравнения является главным. При этом сначала устанавливается

Лемма. *Пусть* $\lim\limits_{y\downarrow 0} y\gamma'(y) = +\infty$, $|\mu_0| < +\infty$,

$$\overline{\lim_{t\uparrow\omega}} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_1'(t)}{p_1(t)} - \frac{p_0'(t)}{p_0(t)} \right] < \sigma_1 |1 + \mu_0|, \qquad \overline{\lim_{t\uparrow\omega}} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_2'(t)}{p_2(t)} - \frac{p_0'(t)}{p_0(t)} \right] < +\infty, \quad (2)$$

Тогда для каждого $\text{Ï}_\omega^0(\mu_0)$ *-решения уравнения* (1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_1(t)\varphi_1(y(t))}{p_0(t)\varphi_0(y(t))} = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_2(t) e^{\gamma(y(t))} \varphi_2(y(t))}{p_0(t)\varphi_0(y(t))} = 0.$$

Далее устанавливается

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{y\downarrow 0} y\gamma'(y) = +\infty$, $|\mu_0| < +\infty$ *и соблюдаются условия* (2). *Тогда для существования у уравнения* (1) $\text{Ï}_\omega^0(\mu_0)$ *-решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) p_0(t)}{\int\limits_{A_{01}}^{t} p_0(\tau)\,d\tau} = \mu_0, \ \int\limits_a^\omega \left| \int\limits_{A_{01}}^{t} p_0(\tau)\,d\tau \right| dt < +\infty, \ A_{01} \in]a, \omega[$$

и при $t \in \,]a, \omega[$ *выполнялись неравенства*

$$\left(1+\mu_0\right)\pi_\omega(t) \le 0, \quad \alpha_0 I_{01}(t) < 0, \quad I_{01}(t) = \int_{A_{01}}^{t} p_0(\tau)d\tau$$

причем для каждого из этих решений имеют место представления при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = -\alpha_0 \varphi_0^0 \int_t^\omega I_{01}(\tau)d\tau\left[1+o(1)\right], \qquad y'(t) = \alpha_0 \varphi_0^0 I_{01}(t)\left[1+o(1)\right].$$

Более того, при выполнении указанных условий уравнение (1) *имеет однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда* $\alpha_0 < 0$.

[1] Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.I //Укр.Мат. журнал. − 2005. − 57, № 3 − С. 338−355

[2] Евтухов В.М., Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. − 2007. − 43. − С. 1−13