С.П. Войтенко (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, де $\Omega(t)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє так звані умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна (див., наприклад, [2]). Нехай L_q — простір 2π–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ на кубі $T^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$ зі стандартною нормою. Для функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, в якості наближаючого полінома за системою експонент $\{e^{i(k^j,x)}\}_{j=1}^{M}$ береться поліном

$$S_M(f,x) = \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j,x)}$$

і розглядається величина

$$e^{\perp}_M(F)_q = \sup_{f\in F} \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} ||f(x) - S_M(f,x)||_q,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — набір векторів $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$ з цілочисловими координатами, $(k^j, x) = k^j_1 x_1 + \ldots + k^j_d x_d$ і

$$\widehat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{T^d} f(t) e^{-i(k^j,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

Величину $e^{\perp}_M(F)_q$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

Одержано точні за порядком оцінки для найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q.

Теорема. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p,q) \ne (1,1), (\infty,\infty)$ *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > d(1/p - 1/q)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M \in N$, *має місце оцінка*

$$e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p-1/q)_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з просторами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С.М. Нікольським.

Наслідок. *Поклавши в теоремі* $\theta = \infty$ *і прийнявши до уваги, що* $B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_p$, *можемо записати наступне співвідношення*

$$e^{\perp}_M(H^{\Omega}_p)_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p-1/q)_+}.$$

Зауважимо, що при $\Omega(t) = t^r$, $r > d(1/p - 1/q)_+$ виконується співвідношення

$$e^{\perp}_{M}(B^{r}_{p,\theta})_q \asymp M^{-r/d+(1/p-1/q)_+}, \tag{1}$$

яке встановлене в роботі [4].

[1] Li Yongping, Xu Guiqiao. The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // Journal of Complexity. – 2002. – **18**. – P. 815 - 832.

[2] Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифферинциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 - 522.

[3] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

[4] Романюк А.С. Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, №4. – С. 513 - 523.