$\boxed{\textit{Рукасов В.І.}}$, *Чайченко С.О., Волковницький Д.С.* (Слов'янський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна)

Про наближення локально сумовних функцій в інтегральній метриці

Нехай $\widehat{L}_1$ — множина функцій $\varphi(\cdot)$, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ і таких, що мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\widehat{1}} = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}}(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+a)|dt)$. Позначимо через $\widehat{L}^{\bar{\psi}}$ [1] ті множини функцій з $\widehat{L}_1$, елементи яких майже для всіх x можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x - \frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}(\psi_1(\sigma v)\cos vt + \psi_2(\sigma v)\sin vt)dvdt,$$

де A_0 – деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, інтеграл розуміється як границя по проміжках, що симетрично розширюються, а $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ — пара неперервних при $v \geq 0$ функцій, таких, що майже для всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є $\widehat{\bar{\psi}}(t) = \widehat{\psi}_{1+}(t) + i\widehat{\psi}_{2-}(t)$, $\widehat{\bar{\psi}}(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\psi}(v)e^{-ivt}dv$. Тут $\bar{\psi} \overset{\text{df}}{=} \psi_{1+} + i\psi_{2-}$, ψ_{1+} — парне продовження функції ψ_1, ψ_{2-} — непарне продовження функції ψ_2. Якщо $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}$ і $\varphi \in \widehat{S}_1$, де $\widehat{S}_1 = \{\varphi \in \widehat{L}_1 : \|\varphi\|_{\widehat{1}} \leq 1\}$, то покладають $f \in \widehat{L}^{\bar{\psi}}\widehat{S}_1 = \widehat{L}^{\bar{\psi}}_1$. Наслідуючи [1], за наближуючі агрегати для функцій із класів $\widehat{L}^{\bar{\psi}}_1$ будемо використовувати оператори вигляду

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\bar{\psi}}(x - \frac{t}{\sigma})\widehat{\lambda_{\sigma,c}\bar{\psi}(\sigma t)}dt, \quad \lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leq \frac{c}{\sigma}, \\ \frac{\sigma(1-|t|)}{\sigma-c}, & \frac{c}{\sigma} \leq |t| \leq 1, \\ 0, & 1 \leq |t|. \end{cases}$$

Кожній функції $\psi \in \mathfrak{A}$ [1] поставимо у відповідність функцію $\eta(t) = \eta(\psi;t) \overset{\text{df}}{=}$ $\overset{\text{df}}{=} \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$, за допомогою якої з $\mathfrak{A}$ виділимо підмножину $\overline{F} \overset{\text{df}}{=} \{\psi \in \mathfrak{A} : \eta^{'}(t) \leq$ $\leq K, t \geq 1\}$, $\eta^{'}(t) = \eta^{'}(t+0)$, де K — стала, що може залежати від ψ.

Теорема 1. *Нехай $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1, 2$ та існують сталі K, $K^{'}$ такі, що $0 < K \leq$ $\leq \frac{\eta(\psi_1;\sigma)-\sigma}{\eta(\psi_2;\sigma)-\sigma} \leq K^{'} < \infty$. Тоді для довільних σ і h, таких, що $\sigma > h \geq 1$, при $\sigma \to \infty$ виконуеться асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\bar{\psi}}_1; V_{\sigma,\sigma-h}) = \frac{4|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi^2}\ln\frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h} + O(1)|\bar{\psi}(\sigma-h)|,$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ і h, а $\eta(\sigma)$ є однією з величин $\eta(\psi_1;\sigma)$ або $\eta(\psi_2;\sigma)$.

[1] Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong. Approximation of locally integrable functions on the real line // Укр. мат. журн. — 1999. – **51**, №11. – С. 1549 – 1561.