Вьюн Виктория Евгеньевна (Институт математики НАН Украины)

Задача о произведении внутренних радиусов неналегающих областей в круге

В задачах о неналегающих областях, как правило, рассматривались функционалы вида $J = \prod\limits_{k=1}^{n} r^{\gamma_k}(B_k, a_k)$, где $\gamma_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$. Внимание многих ученых привлекало исследование на максимум данного функционала при условии, что система неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, лежит в круге $U_R = \{w : w < R\}$, $R \in \mathbb{R}^+$. Приведем здесь одно интересное утверждение. Пусть $n, m, s \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m = 2s - 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим равноугловую (n, m)-лучевую систему точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, такую, что $|a_{k,p}| < R$, и произвольный набор взаимно неналегающих областей $B_{k,p}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Для упрощения выкладок положим $R = 1$. Обозначим далее "управляющие" функционалы

$$M^{(1)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} \chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|,$$

$$M^{(2)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} \chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^{\alpha}(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\beta}(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{nm}\right)^{\frac{1}{2}nm(\alpha+\beta)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{4}n(\alpha-\beta)} \left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^{\alpha} \left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^{\beta} \times$$

$$\times \left[r^{\alpha}(G_1, 1) r^{\beta}(G_2, i) r^{\alpha}(G_3, -1) r^{\beta}(G_4, -i)\right]^{\frac{nm}{4}},$$

где области G_1, G_2, G_3, G_4 — круговые области, а точки 1, i, -1, $-i$ — полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta - \alpha)w^4 - 2(\beta + \alpha)w^2 + (\beta - \alpha)}{(w^4 - 1)^2}\, dw^2.$$