

Ю.П. Вирченко, М.А. Сапрыкин (Белгородский государственный университет)

Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачном диэлектрике

Рассматривается одномерная задача об изменении со временем распределения температуры $T(x, t)$ в ограниченном образце с учётом радиационно-кондуктивного теплообмена. Эволюция $T(x, t)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\dot{T}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x},$$

где $P(x, t)$ – поток энергии излучения, переносящего тепло.

Решается задача о вычислении потока $P(x, t)$, определяемого в виде

$$P(x, t) = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c^2} ([\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)])_x,$$

где ε, μ – соответственно, электрическая и магнитная восприимчивость среды, $\mathbf{E}(x, t)$, $\mathbf{H}(x, t)$ – электрическая и магнитная составляющие излучения, которое переносит тепло. Поля $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{H}(x, t)$ считаются стохастическими. Они подчинены уравнениям Максвелла в среде,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \gamma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(x, t), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где в первое уравнение добавлено слагаемое $\gamma \mathbf{E}$, описывающее поглощение электромагнитной тепловой излучения, а "эффективный" ток $\mathbf{j}(x, t)$ описывает процесс генерации тепловыми колебаниями среды теплового излучения. Он представляет собой стохастический источник, который математически моделируется обобщённым процессом белого шума, как по времени, так и по пространственной координате. Однако, этот шум не является стационарным по t и однородным x . Его амплитуда $A[T(x, t)]$ является функцией имеющейся в каждой фиксированной пространственно-временной точке локальной температуры $T(x, t)$,

$$\langle \mathbf{j}(x, t) \rangle = 0, \quad \langle j_k(x, t) j_l(x', t') \rangle = \delta_{kl} A[T(x, t)] \delta(t - t') \delta(x - x').$$

Для вычисления потока $P(x, t)$, решается стационарная задача на отрезке вещественной оси для системы стохастических уравнений (1) с граничными условиями непрерывности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и их производных по x . Математическое ожидание, определяющее поток $P(x, t)$ вычисляется в коротковолновой асимптотике, когда частота ω полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стремится к бесконечности. Показано, что в указанной асимптотической области реализуется закон излучения Стефана-Больцмана, в котором постоянная Стефана-Больцмана выражается через электромагнитные характеристики среды и коэффициент γ .