Л.Л. Безкоровайна, Т.Ю. Вашпанова (ОНУ ім.І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

LGT - сітка та деформація поверхні

Розглянемо поверхню $S \in C^3$ в E_3 - просторі з векторно - параметричним рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$, де $\mathbf{r}$ - радіус - вектор точки поверхні, (x^1, x^2) - внутрішні координати цієї точки. Формулу для геодезичного скруту можна подати у вигляді [1]:

$$\tau_s = \frac{\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta}, \tag{1}$$

де $g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta$ - перша, $\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ - четверта основні квадратичні форми поверхні, $\rho_{ij} = \frac{1}{2}\left(c_{i\alpha} b_j^\alpha + c_{j\alpha} b_i^\alpha\right)$, $b_\alpha^i = b_{\alpha k} g^{ik}, b_{\alpha k}$ - коефіцієнти другої основної квадратичної форми, $c_{\alpha j}$ - дискримінантний тензор поверхні S.

З (1) випливає, що значення геодезичного скруту залежить від точки поверхні і напряму: $\tau_s = \tau_s(x^1, x^2; dx^1 : dx^2)$.

Екстремальні значення геодезичного скруту в даній точці поверхні будемо називати ***головними скрутами***, а напрями на поверхні, у яких геодезичний скрут досягає екстремальних значень - ***головними напрямами скруту***.

Головні напрями скруту поверхні можна визначити з рівняння [2]:

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0, \tag{2}$$

де $h_{\alpha\beta} = 2\left(H g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right)$, $2H -$ середня кривина поверхні S.

Теорема 1. У будь - якій точці регулярної поверхні за виключенням точок заокруглення, існує два різних дійсних головних напрями геодезичного скруту, до того ж вони є ортогональні.

Лінію на поверхні, напрям якої в кожній точці збігається з головним напрямом скруту будемо називати ***лінією геодезичного скруту***.

Лінії геодезичного скруту поверхні визначаються рівнянням (2) і в сукупності визначають ***LGT - сітку (сітку ліній геодезичного скруту.)***

Теорема 2. На кожній поверхні, де виключені точки заокруглення, існує LGT - сітка. До того ж ця сітка буде сіткою гіперболічного типу.

Розглянемо загальну нескінченно малу (н.м) деформацію поверхні S з вектором зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$, частинні похідні якого за базисом $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}$ розкладемо у вигляді:

$$\mathbf{y}_i = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \mathbf{n},\ (i = 1, 2)$$

де $\mathbf{n}$ - орт нормалі, $T^{\alpha\beta}$ - деякий тензор, а T^α - контраваріантний вектор на S.

Відомо [3], що існування загальної н.м. деформації поверхні S визначається розв'язком системи рівнянь:

$$\tilde{T}^{\alpha k}_{,\alpha} = b^k_\alpha T^\alpha + \mu_\alpha c^{k\alpha},\ b_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0, \tag{3}$$

де $\tilde{T}^{\alpha k} = T^{\alpha k} + \mu c^{k\alpha}$, μ - деяка функція класу C^3.

Тепер накладемо наступне обмеження на деформацію. А саме, припустимо, що при н.м. деформації поверхні зберігається LGT - сітка.

Оскільки диференціальні рівняння LGT - сітки на S мають вигляд (2), то аналітична умова стаціонарності LGT - сітки може бути виражена співвідношенням:

$$\delta h_{\alpha\beta} = \varphi h_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

де $\varphi = \varphi(x^1, x^2)$ - деяка функція класу C^3, $\delta h_{\alpha\beta}$ - варіація тензора LGT - сітки.

Лема. Для того щоб LGT - сітка зберігалася при нескінченно малій деформації поверхні, необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:

$$[2H(c_{\alpha i}g_{\beta j} + c_{\beta i}g_{\alpha j}) - 2c_{\alpha i}b_{j\beta}]\tilde{T}^{ij} = (\mu + \varphi)h_{\alpha\beta} - c_{ik}g^{ij}T^k_{,j}\, g_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha i}T^i_{,\beta}. \tag{5}$$

Теорема 3. Для існування н.м. деформації поверхні з стаціонарною LGT - сіткою необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (3), (5) мала ненульовий розв'язок.

Теорема 4. Будь-яка поверхня класу C^3 ненульової гаусової кривини ($K \neq 0$) і без точок заокруглення допускає нетривіальну н.м. деформацію із стаціонарною LGT - сіткою. Тензор $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ та функція φ при цій деформації мають вигляд:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2(2H^2 - K)}\left[-2HT^\gamma_{,\gamma}g^{\alpha\beta} + K(d^{\alpha i}T^\beta_{,i} + d^{\beta i}T^\alpha_{,i}) + 4H\mu\rho^{\alpha\beta}\right],$$

$$\varphi = -\frac{1}{4(H^2 - K)}c_{i\alpha}h^{ij}T^\alpha_{,j} - \mu,$$

причому контраваріантний вектор T^α та функція μ задовольняють систему рівнянь:

$$\left[\frac{2H\rho^{\alpha\beta}}{2H^2 - K} - c^{\beta\alpha}\right]d^k_\beta\mu_\alpha + \left[\frac{2(H\rho^{\alpha\beta})_{,\alpha}d^k_\beta}{2H^2 - K} - \frac{2H\rho^{\alpha\beta}d^k_\beta(2H^2 - K)_{,\alpha}}{(2H^2 - K)^2}\right]\mu =$$

$$= \left((2HT^\gamma_{,\gamma})_{,\alpha}g^{\alpha\beta} - [K(d^{\alpha i}T^\beta_{,i} + d^{\beta i}T^\alpha_{,i})]_{,\alpha}\right)\frac{d^k_\beta}{2(2H^2 - K)} -$$

$$- \left(2HT^\gamma_{,\gamma}g^{\alpha\beta} - K(d^{\alpha i}T^\beta_{,i} + d^{\beta i}T^\alpha_{,i})\right)\frac{(2H^2 - K)_{,\alpha}d^k_\beta}{2(2H^2 - K)^2} - T^k.$$

[1] Безкоровайна Л.Л. Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навч. посіб. - Одеса: Астропринт, 1999. - 168 с.

[2] Вашпанова Т.Ю.,Безкоровайна Л.Л. Геодезичний скрут та його екстремальні значення: матеріали наук.конф. молодих учених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань,(Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.).-Донецьк(2006)- с.28-29

[3] Безкоровайна Л.Л. Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації, тези доповідей міжнар. конф. "Геометрія в Одесі-2004".-Одеса(2004)-с.7-8.