Е. В. Вареникова (БГУ им. ак. И. Г. Петровского, Брянск, Россия)

О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью

Как известно [1], отражающей функцией (ОФ) системы $\dot{x} = X(t,x)$, $t \in R$, $x \in D \subset R$ с общим решением $\varphi(t;t_0,x_0)$, является вектор-функция $F(t,x)$, определяемая формулой $F(t,x) = \varphi(-t;t,x)$. Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является ОФ системы тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению $F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0$, $F(0,x) \equiv x$. Понятие ОФ используется для изучения вопросов существования и единственности периодических решений систем дифференциальных уравнений [1], а также краевых задач для таких систем.

Теорема 1.*Пусть функции $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered}
a_{20}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - b_{20}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{a}_{20}\cos^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \\
+\bar{a}_{11}\frac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{a}_{02}\sin^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0, \\
a_{11}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - b_{11}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - \bar{a}_{20}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \\
+\bar{a}_{11}\cos 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{a}_{02}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0, \\
a_{02}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - b_{02}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{a}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - \\
-\bar{a}_{11}\frac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{a}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0, \\
a_{20}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + b_{20}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{b}_{20}\cos^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \\
+\bar{b}_{11}\frac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\sin^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0, \\
a_{11}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + b_{11}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - \bar{b}_{20}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \\
+\bar{b}_{11}\cos 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0, \\
a_{02}\sin 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + b_{02}\cos 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{b}_{20}\sin^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau - \\
-\bar{b}_{11}\frac{1}{2}\sin 4\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau + \bar{b}_{02}\cos^2 2\int_0^t b_{\text{ч}}(\tau)d\tau = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

где $a = a(t), b = b(t), a_{\text{ч}} = \dfrac{a(t)+a(-t)}{2}, b_{\text{ч}} = \dfrac{a(t)-a(-t)}{2}$. *Тогда ОФ неавтономной системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases} \tag{2}$$

имеет вид

$$\begin{cases} F_1 = e^{-2\int\limits_0^t a_Ч(\tau)d\tau} \cdot (x\cos 2\int_0^t b_Ч(\tau)d\tau - y\sin 2\int_0^t b_Ч(\tau)d\tau); \\ F_2 = e^{-2\int\limits_0^t a_Ч(\tau)d\tau} \cdot (x\sin 2\int_0^t b_Ч(\tau)d\tau + y\cos 2\int_0^t b_Ч(\tau)d\tau). \end{cases} \tag{3}$$

Следствие. *Пусть выполнены все условия теоремы и, кроме того, функции $a(t)$, $b(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ $2\pi-$периодичны и $\int\limits_{-\omega}^{\omega} a(t)dt = 0$. Тогда, если $\int\limits_{-\omega}^{\omega} b(t)dt$ есть рациональное число, то все решения рассматриваемой системы периодичны.*

С использованием ОФ системы (2), коэффициенты которой удовлетворяют соотношениям (1) доказывается

Теорема 2. *Пусть для системы (2) с непрерывными коэффициентами выполнены условия (1). Тогда*

1) если число

$$D := (a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3) + (a_1b_4 - a_4b_1 + a_3b_2 - a_2b_3)\cdot e^{-2\int\limits_0^t a_Ч(\tau)d\tau} \times$$
$$\times \cos 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau + (a_3b_1 - a_1b_3 + a_4b_3 - a_2b_4)e^{-2\int\limits_0^t a_Ч(\tau)d\tau} \cdot \sin 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau \neq 0,$$

то краевая задача

$$\begin{cases} a_1x(\omega) + a_2y(\omega) + a_3x(-\omega) + a_4y(-\omega) = c_1, \\ b_1x(\omega) + b_2y(\omega) + b_3x(-\omega) + b_4y(-\omega) = c_2, \end{cases} \tag{4}$$

для системы (2) имеет единственное решение, начинающиеся при $t = \omega$ в точке $(x(\omega), y(\omega))$, удовлетворяющей системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} Mx(\omega) + Ny(\omega) = c_1, \\ Px(\omega) + Qy(\omega) = c_2, \end{cases} \tag{5}$$

где числа

$$M := a_1 + a_3e^{-2\int\limits_0^t a_ч(\tau)d\tau} \cdot \cos 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau + a_4e^{-2\int\limits_0^t a_ч(\tau)d\tau} \cdot \sin 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau,$$

$$N := a_2 - a_3e^{-2\int\limits_0^t a_ч(\tau)d\tau} \cdot \sin 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau + a_4e^{-2\int\limits_0^t a_ч(\tau)d\tau} \cdot \cos 2\int\limits_0^t b_Ч(\tau)d\tau,$$

$$P := b_1 + b_3 e^{-2\int\limits_0^t a_{\text{ч}}(\tau)d\tau} \cdot \cos 2\int\limits_0^t b_{\text{Ч}}(\tau)d\tau + b_4 e^{-2\int\limits_0^t a_{\text{ч}}(\tau)d\tau} \cdot \sin 2\int\limits_0^t b_{\text{Ч}}(\tau)d\tau,$$

$$Q := b_2 - b_3 e^{-2\int\limits_0^t a_{\text{ч}}(\tau)d\tau} \cdot \sin 2\int\limits_0^t b_{\text{Ч}}(\tau)d\tau + b_4 e^{-2\int\limits_0^t a_{\text{ч}}(\tau)d\tau} \cdot \cos 2\int\limits_0^t b_{\text{Ч}}(\tau)d\tau.$$

если только это решение продолжимо на $[-\omega, \omega]$ (если же указанное решение не продолжимо на $[-\omega, \omega]$, то задача (4) для системы (2) решений не имеет).

2) если число $D = 0$ и $\dfrac{P}{M} = \dfrac{Q}{N} \neq \dfrac{c_2}{c_1}$, то задача (4) для системы (2) не имеет решений.

3) если число $D = 0$ и $\dfrac{P}{M} = \dfrac{Q}{N} = \dfrac{c_2}{c_1}$, то задача (4) для системы (2) имеет бесконечно много решений, причем при $t = \omega$ начальные данные $(x(\omega), y(\omega))$ этих решений заполняют всю прямую $Mx(\omega) + Ny(\omega) = c_1$.

4) если $M = N = P = Q = c_1 = c_2 = 0$, то все решения системы, продолжимые на $[-\omega; \omega]$ являются решениями задачи (4) для системы (1).

[1] Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. — Гомель: издательство "ГГУ им. Ф. Скорины", 2004.