П.Д. Варбанец, О.В. Савастру (Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Одесса, Украина)

Обобщённая проблема делителей над кольцом целых гауссовых чисел

Пусть $\tau(a_1, \ldots, a_k; \alpha)$ означает количество представлений целого гауссового числа α в виде $\alpha = \delta_1^{a_1}, \ldots, \delta_k^{a_k}$, где $k \geq 2$ и $1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$ заданные натуральные числа; $\delta_1 \ldots, \delta_k$ - целые гауссовые числа.

Под общей проблемой делителей над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ мы будем понимать проблему оценивания сумматорной функци

$$T(x; a_1, \ldots, a_k) := \sum_{N(\alpha) \leq x} \tau(a_1, \ldots, a_k; \alpha) \tag{1}$$

Для $0 \leq \phi_1^{(j)} < \phi_2^{(j)} \leq \frac{\pi}{2}$, $j = 1, \ldots, \ell$, $\ell \leq k$ мы обозначим через S_j сектор

$$S_j(\phi_1, \phi_2) := \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}[i] \mid \ \phi_1^{(j)} \leq \arg \alpha \leq \phi_2^{(j)} \right\}, \ \ 1 \leq j \leq \ell \tag{2}$$

Цель нашего доклада показать, как можно исследовать, с помощью аппарата дзета-функций Гекке[1], задачу оценивания остаточного члена в асимптотической формуле для суммы

$$T(x; a-1, \ldots, a_k; S_k(\ell)) = \sum_{N(\alpha) \leq x} \sum_{\substack{\delta_1^{a_1} \cdots \delta_k^{a_k} = \alpha \\ \delta_j \in S_j, \ j=1,\ldots,\ell}} 1 \tag{3}$$

Для случая $k = 2$, $\ell = 1$ мы получаем верхние и нижние оценки остаточного члена в рассматриваемой задаче, равномерные по секторам $S(\phi_1, \phi_2)$, если $\phi_2 - \phi_1 \gg x^{-\frac{1}{3}+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ - произвольное малое.

Кроме того, мы изучаем распределение целых гауссовых чисел с делителями в узких секторах и в арифметических прогрессиях.

[1] E. Hecke. Ein neue Art von Zetafunctionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen I, II. — Math. Zeit.,1(1918), 357-376; 6(1920), 11-51.