А.А. Трофимук (Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь)

О конечных разрешимых группах с заданными свойствами силовских подгрупп

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Согласно теореме Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Бициклической называют группу $G = AB$, факторизуемую циклическими подгруппами A и B. Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе [2]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6. Из теоремы Холла и Хигмена [1, теорема VI.14.16] следует, что производная длина разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа различных простых делителей ее порядка.

В [3] В. С. Монаховым получена оценка производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ в зависимости от порядков силовских подгрупп группы G. В частности, если порядок разрешимой группы не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

В настоящей заметке установлено, что для оценки производной длины достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп не всей группы, как это сделано в [3], а только ее подгруппы Фиттинга. В частности, если все силовские подгруппы из подгруппы Фиттинга бициклические, то оценка, полученная в [2], сохраняется. Оказалось также, что существенное влияние на верхнюю границу производной длины группы оказывают порядки не всех силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга, а только тех, которые не являются бициклическими, если таковые имеются. Для формулировки основного результата введем следующие обозначения: $s_p(G) = log_p(|G_p|)$, $s(G) = max\{s_p(G) \mid p \in \pi^*(G)\}$. Здесь G — группа, G_p — ее силовская p-подгруппа, $\pi^*(G)$ — множество всех простых чисел из $\pi(G)$, для которых силовская p-подгруппа в G небициклическая. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то $d(G) \leq \rho(s(F)) + max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}$. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то $d(G) \leq 6$.*

Здесь F — подгруппа Фиттинга группы G, а $d(G)$ — производная длина разрешимой группы G. Через $\rho(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n, P)$, где P — поле.

[1] Huppert B. Endliche Gruppen I. — Springer, 1967.

[2] Монахов В. С., Грибовская Е. Е. // Матем. заметки. — 2001. — **70**, N 4. — С. 603–612

[3] Монахов В. С. // Алгебра и логика. — 2004. — **43**, N 4. — С. 411–424