О.Д. Трофименко (Донецький Національний Університет, Донецьк, Україна)

Теореми про середнє для поліаналітичних поліномів

Нехай функція $f \in C(D)$ (D – область в C), m – натуральне число. Локально інтегрована в D функція f називається m-аналітичною в D тоді і тільки тоді, коли $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^m f = 0$ у сенсі розподілів.

В даній роботі представлені теореми про середнє для функцій певного виду у випадках кругової або багатокутової області з поліноміальною вагою.

Теорема 1.Нехай $L \in \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{N}$, $L < \frac{n+1}{2}$ і $f(z) = \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k$. Тоді для кожного правильного n-кутника $p_n(z,r)$ з центром в точці z і радіусом вписаного кола r виконується рівність

$$\int\int_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta = 0. \tag{1}$$

Теорема 2. Нехай $n, m, h \in \mathrm{N}$, $0 \le h < n - s$, $0 \le s \le m-1$ і функція

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \bar{z}^l,$$

де $c_{k,l}$ – довільні константи.

Тоді для кожного правильного n-кутника $p_n(z,r)$ з центром в точці z і радіусом r вписаного кола виконується рівність

$$\int\int_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\xi d\eta = \sum_{p=s}^{h+s} \frac{n r^{2p+2} \lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^p f(z),$$

де $\lambda_p = \int_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{dt}{cos^{2p+2} t} dt$.

Теорема 3. Нехай $m \in \mathrm{N}$ і f - m-аналітична в Ω (Ω - область в C). Тоді $\forall z \in \Omega$ виконується рівність

$$\sum_{n=s+1}^{m-1} \frac{r^{2n}}{(n-s-1)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\zeta, \tag{2}$$

де $r < dist(z, \partial\Omega)$, $0 \le s \le m-1$.

Теорема 4. Нехай $m \in \mathrm{N}$ і f - m-аналітична в Ω (Ω - область в C). Тоді $\forall z \in \Omega$ виконується рівність

$$\sum_{n=s+1}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)(n-s-1)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{|\zeta - z| \le r} (\zeta - z)^s f(\zeta) d\xi d\eta, \tag{3}$$

де $r < dist(z, \partial\Omega)$, $0 \le s \le m-1$.

[1] Maxwell O.Reade. On areol monogenic functions. // Bulletin of the American Mathematical Society, **53**, 1947. – pp.98-103.

[2] Maxwell O.Reade. A theorem of Fedoroff. // Duke Math.J.,Volume **18**(**1**), 1951. – pp.105-109.

[3] Volchkov V.V. Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2003. – 454 p.

[4] Трофименко О.Д. Теорема о среднем для полианалитических функций. // Труды ИПММ НАН Украины, **17**, 2008. – стр. 194-196.