Д.В. Третьяков (Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина), *dvttvd@mail.ru*

Аналоги формул фон Неймана для кососимметрических антилинейных операторов

Пусть $\mathfrak{H}-$сепарабельное гильбертово пространство, $S : \mathfrak{H} \supset \mathfrak{D}_S \to \mathfrak{H}-$ замкнутый, кососимметрический, антилинейный оператор ($\overline{\mathfrak{D}_S} = \mathfrak{H}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}_S$ $(Sx, y) = -(Sy, x)$).

Определение. *Число λ называется точкой регулярного типа оператора S , если*

$$\exists C > 0 : \quad \forall x \in \mathfrak{D}_S \quad \| (S - \lambda I)x \| \geq C \| x \|$$

Обозначим через $\xi(S)-$поле регулярности S [1]. Если $0 \neq \lambda \in \xi(S)$, то $\mathbb{T}_{|\lambda|} \subseteq \xi(S)$, где $\mathbb{T}_r = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \mid \omega \mid = r\}$. Поэтому, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \xi(S)$. Пусть $\lambda \neq 0-$точка регулярного типа оператора S. Множество вида $\mathfrak{N}_\lambda := (Ran(S - \lambda I))^{(\perp)}$ будем называть дефектным бимодулем оператора S. Ортогональное дополнение понимается в следующем смысле: $x(\perp)y \Leftrightarrow Re(x, y) = 0$. Дефектные бимодули $\mathfrak{N}_\lambda$ в некоторой окрестности $\mathbb{T}_{|\lambda|}$ имеют одинаковую размерность. Отсюда $\dim \mathfrak{N}_\lambda$ одинакова $\forall \lambda \neq 0$. Справедливы аналоги формул фон Неймана

Теорема 1. *Пусть S-замкнутый, кососимметрический антилинейный оператор, $\lambda \neq 0$. Тогда*

$$\mathfrak{D}_{S^*} = \mathfrak{D}_S \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{-\lambda} = \mathfrak{D}_S \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{D}_S \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{-\bar{\lambda}},$$

$$S^*(x_0 + n_\lambda + n_{-\lambda}) = -Sx_0 + \overline{\lambda} n_\lambda - \overline{\lambda} n_{-\lambda}, \quad x_0 \in \mathfrak{D}_S, \ n_{\pm\lambda} \in \mathfrak{N}_{\pm\lambda}.$$

Теорема 2. *Пусть S-замкнутый, кососимметрический антилинейный оператор, $\lambda \neq 0$. Замкнутый антилинейный оператор $\widetilde{S}$ является кососимметрическим расширением оператора S тогда и только тогда, когда существует аддитивная изометрия $\Phi : \mathfrak{N}_\lambda \supseteq \mathfrak{D}_\Phi \to \mathfrak{R}_\Phi \subseteq \mathfrak{N}_{-\lambda}$, такая что выполняются следующие условия:*
1) $\dim \mathfrak{D}_\Phi = \dim \mathfrak{R}_\Phi$;
2) $\forall n_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi \quad (\Phi n_\lambda, n_\lambda) \in \mathbb{R}$.
Если эти условия выполнены, то имеют место формулы:
$\forall x \in \mathfrak{D}_{\widetilde{S}} \quad x = x_0 + n_\lambda + \Phi n_\lambda, \ \widetilde{S}x = Sx_0 - \overline{\lambda} n_\lambda + \overline{\lambda} \Phi n_\lambda, \quad x_0 \in \mathfrak{D}_S, \ n_\lambda \in \mathfrak{D}_\Phi.$

Список литературы

[1] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве // М.: Наука. — 1966. —543 с.