*А.А. Томусяк* (ВДПУ, Вінниця, Україна)

## Версія теорії аналітичних функцій

Ще у 1935 р. Р. Лютер переніс частину результатів теорії функцій комплексної змінної на функції кватерніонної змінної, скориставшись аналогами рівнянь Коші-Рімана. Подальші уточнення можна знайти в [1]–[3].

Нами пропонується дещо інший підхід, точніше «реанімується» вейєрштрасівський. Насамперед зміщуються акценти щодо алгебраїчної структури тіла $Q$, а саме $Q$ – асоціативна алгебра рангу 4 над полем $\boldsymbol{R}$ з відомим матричним поданням, елементи якої наділяються основними матричними характеристиками. Побудовано канонічне подання кватерніона

$$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = \lambda_q P_{\lambda_q} + \overline{\lambda}_q \overline{P}_{\lambda_q},$$

де $\lambda_q x_0 + ir$, $P_{\lambda_q} = \frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir} i + \frac{x_2}{2ir} j + \frac{x_3}{2ir} k$, $P_{\lambda_q}^2 = P_{\lambda_q}$, $P_{\lambda_q} \vec{P}_{\lambda_q} = 0$, $\overline{P}_{\lambda_q}^2 = \overline{P}_{\lambda_q}$.

«Генератором» для побудови аналітичних функцій слугує теорема:

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається на інтервалі $(-r;r)$ і має сумою $S(x)$, то кватерніонний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ збігається для всіх тих кватерніонів, власні значення яких за модулем менше $r$, причому його сума подається у вигляді

$$S(q) = \frac{1}{2}(S(\lambda_q) + S(\overline{\lambda}_q)) + \frac{1}{2ir}(S(\lambda_q) - S(\overline{\lambda}_q))(x_1 i + x_2 j + x_3 k). \tag{1}$$

Поняття аналітичної функції узагальнюється в такий спосіб. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$, $f(z)$ її продовження з $(a;b)$ на комплексну площину таке, що $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Тоді

$$f(q) := \frac{1}{2}(f(\lambda_q) + f(\overline{\lambda}_q)) + \frac{1}{2ir}(f(\lambda_q) - f(\overline{\lambda}_q))(x_1 i + x_2 j + x_3 k) =$$

$$= u(x_0, r) + \frac{1}{r} v(x_0, r)(x_1 i + x_2 j + x_3 k), \tag{2}$$

де $u(x_0, r) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x_0, r) = \operatorname{Im} f(z)$.

При побудові елементів диференціального числення виходимо з природної рівності

$$(q^n)' := nq^{n-1}.$$

Тоді для (1)

$$S'(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n q^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x_0} S(q),$$

для (2)

$$f'(q) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(q),$$

причому переносяться правила диференціювання.

І насамкінець, якщо $f(z)$ аналітична, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, то похідна функції (2) подається у вигляді

$$f'(q) = \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_1} i - \frac{\partial u}{\partial x_2} j - \frac{\partial u}{\partial x_3} k.$$

[1] Садбери Э. Кватернионный анализ // Пер. с англ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 2, 2004. – С. 130-157.

[2] Alayon-Solarg D. On some modifications of the Fueter operator // daniejdaniel@gmail.com 01.02.2008. – 13 p.

[3] Khaled Abdel-Khalek. Quaternion analysis // ar Xiv: hep-th / 9607152 v 2 18.11.1996 – 8 p.