

М.Ф. Тиман (Днепропетровский аграрный университет, Украина)

Об уклонении полигармонических функций от граничных значений в метрике пространства S_m^p

Пусть $U(r, x)$ является полигармонической функцией порядка k в круге $|z| < 1$ ($z = re^{ix}$), т.е. $\Delta^k U(r, x) = 0$, где $\Delta^1 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} U$ — оператор Лапласа, а $\Delta^k U = \Delta(\Delta^{k-1} U)$. Пусть, кроме этого, 2π -периодическая, интегрируемая по Лебегу функция $f(x)$ с рядом Фурье $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ принадлежит пространству S^p ($1 \leq p < \infty$) (см. [1]). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\lim_{r \rightarrow 1} \|U(r, x) - f(x)\|_{S^p} = 0$.

В случае, когда функция $U(r, x)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial^l}{\partial r^l} U(r, x)|_{r=1} = 0$, $l = 1, 2, \dots, k-1$, то она представима в виде

$$U(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu}(r, k) \cos \nu t \, dt, \quad (1)$$

где

$$\lambda_{\nu}(r, k) = r^{\nu} \sum_{l=0}^{k-1} (1-r^2)^l Q(l, \nu), \quad (2)$$

$$Q(l, \nu) = \frac{\nu(\nu+2)(\nu+4) \cdots (\nu+2l-2)}{l! 2^l}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (Q(0, l) = 1). \quad (3)$$

Очевидно, что при $k = 1$ $\lambda_{\nu}(r, 1) = r^{\nu}$. В этом случае формула (1) задает гармоническую функцию. При $k = 2$, $l = 1$, $\lambda_{\nu}(r, 2) = r^{\nu}(1 + \frac{1-r^2}{2}\nu)$ формула (1) задает бигармоническую функцию. Справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(x) \in S^p$ ($1 \leq p < \infty$), а функция $U(r, x)$ представима в виде (1), в котором множители $\lambda_{\nu}(r, k)$ удовлетворяют условиям (2) и (3). Тогда при любом натуральном $k \geq 1$ справедлива оценка

$$R(f; \lambda)_{S^p} \leq M(p)(1-r)^k \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\nu} (\nu+1)^{kp-1} E_{\nu}^p(f)_{S^p} \right\}^{1/p}, \quad (4)$$

где $M(p)$ — константа зависящая лишь от p .

Ранее случаи $k = 1$, $k = 2$ установлены в [2], [3]. Для пространств L_p ($1 \leq p < \infty$) оценки величин $R(f, \lambda)_{L_p} = \|U(r, x) - f(x)\|_{L_p}$ исследованы в работах [4]–[6].

Одним из кратных аналогов задач, указанных выше, следует считать случай, когда периодическая периода 2π по каждой из переменных x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) функция $f(x_1, \dots, x_m)$ интегрируема по Лебегу на кубе периодов $G^m = [0, 2\pi]^m$ с рядом Фурье

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} c_n e^{i(n, x)}, \quad n = (n_1, n_2, \dots, n_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad (n, x) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m,$$

принадлежит пространству S_m^p ($1 \leq p < \infty$), а

$$U(x_1, \dots, x_m; \lambda_\nu(r, k)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu(r, k) \{S_{\nu, \dots, \nu}(f; x_1, \dots, x_m) - S_{\nu-1, \dots, \nu-1}(f; x_1, \dots, x_m)\}, \quad (5)$$

где числа $\lambda_\nu(r, k)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) определены равенствами (4) и (5), а $S_{\nu, \dots, \nu}(f; x_1, \dots, x_m)$ — частные суммы кратного ряда Фурье порядка ν по каждой из переменных x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) функции $f(x_1, \dots, x_m)$.

Интегральным представлением функции, определенной равенством (5), является

$$U(x_1, \dots, x_m; \lambda_\nu(r, k)) = \frac{1}{\pi^m} \int_{G^m} f(x_1 + t_1, \dots, x_m + t_m) \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(r, k) \left\{ \prod_{l=1}^m D_\nu(t_l) - \prod_{l=1}^m D_{\nu-1}(t_l) \right\} \prod_{l=1}^m dt_l, \quad (6)$$

где $D_\nu(t_l) = \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\nu} \cos \mu t_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$). Ядро интегрального оператора (6) $\phi(t_1, \dots, t_m; \lambda_\nu(r, k)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(r, k) \left\{ \prod_{l=1}^m D_\nu(t_l) - \prod_{l=1}^m D_{\nu-1}(t_l) \right\}$ можно представить в виде

$$\phi(t_1, \dots, t_m; \lambda_\nu(r, k)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(r, k) \left\{ \sum_{l=1}^m \cos \nu t_l \prod_{\mu=l+1}^m D_\nu(t_\mu) \prod_{\mu=1}^{l-1} D_\nu(t_\mu) \right\}. \quad (7)$$

Интегральная формула (6) с ядром (7) позволяет убедиться в том, что оператор (6) при $k = 1$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\Delta_{rx_1} \Delta_{rx_2} \dots \Delta_{rx_m} U = 0 \quad \left(\Delta_{rx_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad l = 1, 2, \dots, m \right).$$

А при любом $k \geq 2$ линейный оператор (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta_{rx_1}^k \Delta_{rx_2}^k \dots \Delta_{rx_m}^k U = 0.$$

В этом случае для функций многих переменных справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 2. Пусть $f \in S_m^p$ ($1 \leq p < \infty$), а функция $U(x_1, \dots, x_m; \lambda_\nu(r, k))$ определена равенством (5).

$$\begin{aligned} R(f; \lambda)_{S_m^p} &= \|f(x) - U(x_1, \dots, x_m; \lambda_\nu(r, k))\|_{S_m^p} \leq \\ &\leq M(p, k, m)(1-r)^k \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu (\nu+1)^{kp-1} E_{\nu, \dots, \nu}^p(f)_{S_m^p} \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

где $E_{\nu, \dots, \nu}(f)_{S_m^p}$ — полное наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка ν по каждой из переменных x_l ($l = 1, 2, \dots, m$) в метрике пространства S_m^p , а константа $M(p, k)$ зависит лишь от p , m и k .

- [1] А. И. Степанец, А. С. Сердюк. Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн., **54**, №1, (2002), 106–124.
 - [2] М. П. Тиман, О. Б. Шаврова. Лінійні оператори типу Марцинкевіча для періодичних функцій багатьох змінних в просторах S_m^p та L_p^m // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України (математика), **4**, №1. — Київ (2007), 352–375.
 - [3] М. Ф. Тиман, О. Б. Шаврова. *Приближение периодических функций многих переменных операторами полигармонического типа в пространствах S_m^p* // Вісник Донецького університету. Математика, №1. Природничі науки. — Донецьк (2009).
 - [4] М. Ф. Тиман, О. Б. Шаврова. Некоторые оценки решений полигармонических уравнений // Материалы XII международной математической школы. — Саратов (2004), 180–181.
 - [5] М. Ф. Тиман. Аппроксимация и свойства периодических функций. - Днепропетровск: Полиграфист, 2000. — 320 с.
-