В.П. Бурский, А.А. Телицына (Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

Сингулярные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной биквадратной кривой

Рассматривается задача о нахождении решения уравнения Лапласа на плоскости переменных (ξ, η), возможно, без конечного числа точек, с однородными данными Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad u|_C = 0 \tag{1}$$

на заданной кривой C такого вида

$$C = \{(\xi, \eta) | (\xi^2 + \eta^2)^2 + 2a(\xi^2 - \eta^2) + 2b(\xi^2 + \eta^2) - 1 = 0\}.$$

Доказано, что существует счетное и плотное подмножество S для набора параметров $a > 0, b \in R$, для которого задача (1) имеет нетривиальное решение в классе рациональной функции. Более точно, для данных a, b находятся числа θ, K, K' такие, что условие периодичности

$$\theta N = 2Km_1 + iK'm_2$$

с некоторыми целыми числами N, m_1, m_2 необходимо и достаточно для существования нетривиального решения задачи (1), которое существует для каждого натурального числа n и имеет следующий вид

$$u(\xi, \eta) = G_{2nN}(\xi + i\eta) - G_{2nN}(\xi - i\eta),$$

где $G_{2nN}(z)$ - рациональные функции степени $2nN$, и полюса этих функций указываются.

Здесь K, K' - четверть-периоды, которые можно найти посредством эллиптического интеграла Лежандра: $K = K(k)$, $K' = K(k')$, $k' = (1 - k^2)^{1/2}$, $K(k) = \int_0^1 dt/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$, параметры k, θ определяются из соотношений

$$a = \frac{\mathrm{dn}^2(\theta; k)}{kk' \,\mathrm{sn}^2(\theta; k)}, \quad b = -\frac{\mathrm{cn}(\theta; k)}{kk' \,\mathrm{sn}^2(\theta; k)},$$

$$\frac{b^2 - a^2 + 1}{a} = \frac{k}{k'} - \frac{k'}{k} \in R, \quad k \in [0; 1].$$

Подобные результаты получены и для некоторых других кривых такого же вида.