А.Л. Таргонский (Житомирский государственный университет имени Ивана Франка, Житомир, Украина)

Некоторые экстремальные задачи в геометрической теории функций

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$, $g_B(w, a)$ – обобщенная функция Грина области B относительно точки $a \in B$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$. Рассмотрим системы точек $A_{n,m} = \left\{a_{2k-1,p}\right\}$, $a_{2k-1,p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}$ и $A_n = \{a_{2k}\}_{k=1}^{n}$, $a_{2k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что

$$\arg a_{2k-1,1} = \arg a_{2k-1,2} = ... = \arg a_{2k-1,m}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$0 < |a_{2k-1,1}| < |a_{2k-1,2}| < ... < |a_{2k-1,m}| < \infty, \quad k = \overline{1,n},$$

$$a_{2k} = R \cdot \exp i\frac{\pi(2k-1)}{n}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\arg a_{1,p} < \arg a_2 < \arg a_{3,p} < \arg a_4 < ... < \arg a_{2n-1,p} < \arg a_{2n}, \quad p = \overline{1,m}.$$

Обозначим

$$P_k(A_{n,m}) := \{w :\ \arg a_{2k-1,p} < \arg w < \arg a_{2k+1,p}\},$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\pi}(\arg a_{2k+1,p} - \arg a_{2k-1,p}), \quad \arg a_{2n+1,p} := 2\pi, \quad k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m}.$$

Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольных систем точек $A_{n,m}$, A_n, введенных выше, и открытого множества D, $A_{n,m} \cup A_n \subset D$ обозначим $D_k(a_{l,p})$ связную компоненту множества $D(a_{l,p})\bigcap\overline{P_k(A_{n,m})}$, содержащую точку $a_{l,p}$, $l = 2k-1, 2k+1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_{2n+1,p} := a_{1,p}$; а через $D_k(a_{2k})$ обозначим связную компоненту множества $D(a_{2k})\bigcap P_k(A_{n,m})$, содержащую точку a_{2k}, $k = \overline{1,n}$.

Будем говорить, что открытое множество D, $A_{n,m} \cup A_n \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно систем точек $A_{n,m}, A_n$, если выполняется условие

$$\left[D_k(a_{s,p})\bigcap D_k(a_{l,q})\right]\bigcup\left[D_k(a_{2k})\bigcap D_k(a_{l,q})\right] = \varnothing,$$

$$s, l = 2k-1, 2k+1,\ q, p = \overline{1,m}.$$

На системе точек $A_{n,m}$ определим функционал

$$\mu = \mu\left(A_{n,m}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{2k-1,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)\cdot\left|\frac{a_{2k-1,p}}{R}\right|.$$

В работе, для произвольных систем точек $A_{n,m}$, A_n, любого открытого множества D, $A_{n,m}\cup A_n\subset D$, удовлетворяющего третьему условию неналегания, рассматривается задача по определению максимума функционала

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p})\cdot r^{\alpha}(D,a_{2k}),$$

где $\alpha\geq 0$. Идея рассмотрения такой задачи принадлежит А.К. Бахтину.