Ю.М. Сидоренко, О.І. Чвартацький (Львівский національний університет імені Івана Франка)

Бінарні перетворення просторово-двовимірних узагальнень матричної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями

Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(N \times K)$ матричними розв'язками лінійної інтегродиференціальної задачі

$$L\{\varphi\} := \alpha\varphi_y - \sum_{i=0}^{n} u_i\varphi^{(i)} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega[\mathbf{r},\varphi] = \varphi\Lambda, \tag{1}$$

та транспонованої задачі

$$L^{\tau}\{\psi\} := -\alpha\psi_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^{\top}\psi)^{(i)} - \mathbf{r}\mathcal{M}_0^{\top}\Omega[\mathbf{q},\psi] = \psi\tilde{\Lambda}, \tag{2}$$

з матричними $(N \times N)$ коефіцієнтами $u_i = u_i(x,y)$, $i = \overline{0,n}$, $\alpha \in \mathbb{R}\bigcup \boldsymbol{i}\mathbb{R}$.
Λ, $\tilde{\Lambda}$ та $\mathcal{M}_0$ - сталі матриці розмірності $(K \times K)$ та $(l \times l)$ відповідно;
$q = q(x,y)$ та $r = r(x,y)$ - матричні функції розмірності $(N \times l)$;
$\Omega[\mathbf{r},\varphi]$, $\Omega[\mathbf{q},\psi]$ - функції, що задовольняють умови: $\Omega_x[\mathbf{r},\varphi] = \mathbf{r}^{\top}\varphi$, $\Omega_x[\mathbf{q},\psi] = \mathbf{q}^{\top}\psi$.

Оператор Лакса L (1) вперше розглядався в роботах [1], [2] при побудові просторово-двовимірних узагальнень нелінійних систем математичної фізики, які виникають при нелокальних редукціях в матричній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі.

Теорема 1.

1. Нехай функції f та g розмірності $(N \times 1)$ є розв'язками спектральних задач

$$L\{f\} := \alpha f_y - \sum_{i=0}^{n} u_i f^{(i)} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega[\mathbf{r},f] = f\lambda, \tag{3}$$

$$L^{\tau}\{g\} := -\alpha g_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(u_i^{\top}g)^{(i)} - \mathbf{r}\mathcal{M}_0^{\top}\Omega[\mathbf{q},g] = g\tilde{\lambda}, \tag{4}$$

з власними значеннями $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ відповідно, і функціями $\Omega[\mathbf{r},f]$ та $\Omega[\mathbf{q},g]$, де $\Omega_x[\mathbf{r},f] = \mathbf{r}^{\top}f$, $\Omega_x[\mathbf{q},g] = \mathbf{q}^{\top}g$.

Тоді функції $F := W\{f\} = f - \Phi\Omega[\psi,f]$ та $G := W^{-1,\tau}\{g\} = (W^{\tau})^{-1}\{g\} = g - \Psi\Omega[\varphi,g]$ з оператором $W = I - \Phi\Omega[\psi,\cdot]$ задовольняють спектральні задачі

$$\hat{L}\{F\} = F\lambda, \tag{5}$$
$$\hat{L}^\tau\{G\} = G\tilde{\lambda}, \tag{6}$$

з інтегродиференціальними операторами $\hat{L}$, $\hat{L}^\tau$ такого вигляду

$$\hat{L} := WLW^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i \mathcal{D}^i + \Phi\mathcal{M}\Omega[\Psi, \cdot] + \hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}_0\Omega[\hat{\mathbf{r}}, \cdot], \tag{7}$$

$$\hat{L}^\tau = W^{-1,\tau}L^\tau W^\tau = -\alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathcal{D}^i \hat{u}_i - \Psi\mathcal{M}^\top\Omega[\Phi, \cdot] - \hat{\mathbf{r}}\mathcal{M}_0^\top\Omega[\hat{\mathbf{q}}, \cdot], \tag{8}$$

де

$$\mathcal{M} := C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C,\ \Phi := \varphi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1},\ \Psi^\top := (C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi^\top,$$
$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \Phi\Omega[\psi, \mathbf{q}],\ \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \Psi\Omega[\varphi, \mathbf{r}], \tag{9}$$

$\Omega[\Psi, F]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{r}}, F]$, $\Omega[\Phi, G]$ і $\Omega[\hat{\mathbf{q}}, G]$ - функції, для яких виконуються умови: $\Omega_x[\Psi, F] = \Psi^\top F$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{r}}, F] = \hat{\mathbf{r}}^\top F$, $\Omega_x[\Phi, G] = \Phi^\top G$, $\Omega_x[\hat{\mathbf{q}}, G] = \hat{\mathbf{q}}^\top G$.

2. Коефіцієнти $\hat{u}_l$, $l = \overline{0, n}$ перетвореного оператора $\hat{L}$ мають вигляд

$$\hat{u}_l = u_l + \sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-1}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i-j-1 \\ i-j-l-1 \end{pmatrix} u_i \varphi^{(j)}(\Psi^\top)^{(i-j-l-1)} -$$
$$-\Phi\sum_{i=l+1}^{n}(-1)^{i-l-1}(\psi^\top u_i)^{(i-l-1)} -$$
$$-\sum_{i=l+2}^{n}\sum_{j=0}^{i-l-2}\sum_{k=0}^{i-l-j-2}(-1)^j\begin{pmatrix} i-j-1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i-k-j-2 \\ i-k-j-l-2 \end{pmatrix}\cdot \tag{10}$$
$$\cdot\Phi(\psi^\top u_i)^{(j)}\varphi^{(k)}(\Psi^\top)^{(i-k-l-j-2)},\ l = \overline{0, n-2},$$
$$\hat{u}_{n-1} = u_{n-1} + u_n\varphi\Psi^\top - \Phi\psi^\top u_n,$$
$$\hat{u}_n = u_n.$$

.

Наслідок 1.

Нехай задовольняється рівняння Лакса $L_t = [M, L](:= ML - LM)$ з оператором $M = \sum_{i=0}^{m} \upsilon_i \mathcal{D}^i$;
функції φ та ψ - фіксовані розв'язки еволюційних рівнянь

$$\varphi_t = M\{\varphi\},\ \psi_t = -M^\tau\{\psi\}, \tag{11}$$

а функції f та g - довільні розв'язки рівнянь

$$f_t = M\{f\},\ g_t = -M^\tau\{g\}. \tag{12}$$

Тоді перетворені оператори $\hat{L} := WLW^{-1}$ та $\hat{M} := \partial_t - W(\partial_t - M)W^{-1} = \sum_{i=0}^{m} \hat{v}_i \mathcal{D}^i$, де $W = I - \Phi\Omega[\psi, \cdot]$, задовольняють рівняння Лакса $\hat{L}_t = [\hat{M}, \hat{L}]$, а функції $F := W\{f\}$ та $G := W^{-1,\tau}\{g\}$ є розв'язками нових еволюційних рівнянь

$$F_t = \hat{M}\{f\},\ G_t = -\hat{M}^{\tau}\{g\}. \tag{13}$$

Зауваження 1.

1) Формули для коефіцієнтів $\hat{v}_i = \hat{v}_i(x, y, t)$ перетвореного оператора $\hat{M}$ аналогічні формулам (10).
2) Теорема 1 є природним узагальненням на просторовий випадок $\alpha \neq 0$ відповідної Теореми 1 з роботи [3].

Наслідок 2.

Нехай в рівностях (1)-(4) $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0,\ \lambda = \tilde{\lambda} = 0$.
Тоді при перетворенні подібності оператор $L = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega[\mathbf{r}, \cdot]$ перейде в оператор $\hat{L} := WLW^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i \mathcal{D}^i + \hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}_0\Omega[\hat{\mathbf{r}}, \cdot]$, де коефіцієнти $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{u}_i, i = \overline{0, n}$ мають вигляд (9), (10), а потенціали $\Omega[\mathbf{r}, f], \Omega[\mathbf{q}, g], \Omega[\hat{\mathbf{r}}, F], \Omega[\hat{\mathbf{q}}, G]$, згідно з формулами Лагранжа для систем (12)-(13) можна записати у явному вигляді, наприклад

$$\Omega[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0, t_0, y_0)}^{(x,t,y)} P[\mathbf{r}, f]dx + Q[\mathbf{r}, f]dt + R[\mathbf{r}, f]dy, \tag{14}$$

де

$$P[\mathbf{r}, f] = \mathbf{r}^{\top} f, \tag{15}$$

$$Q[\mathbf{r}, f] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^{\top} v_i)^{(i)} f^{(i-j-1)}, \tag{16}$$

$$R[\mathbf{r}, f] = \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\hat{\mathbf{r}}^{\top} u_i)^{(i)} f^{(i-j-1)} + \alpha^{-1}\Omega_0[\mathbf{r}, q]\mathcal{M}_0\Omega_0[\mathbf{r}, f], \tag{17}$$

а потенціали $\Omega_0[\mathbf{r}, q]$ та $\Omega_0[\mathbf{r}, f]$ мають такий вигляд

$$\Omega_0[\mathbf{r}, q] = \int_{(x_0, t_0, y)}^{(x,t,y)} P[\mathbf{r}, q]dx + Q[\mathbf{r}, q]dt,$$
$$\Omega_0[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0, t_0, y)}^{(x,t,y)} P[\mathbf{r}, f]dx + Q[\mathbf{r}, f]dt.$$

[1] *Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С. 19-23.

[2] *Самойленко А.М., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78-97.

[3] *Sydorenko Yu.* Generalized Binary Darboux–like Theorem for Constrained Kadomtsev–Petviashvili (cKP) Flows // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 470-477.