Марина Степочкина (Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

Связь между неотрицательными и слабо неотрицательными формами Титса

Эта работа выполнена вместе с доктором физ-мат. наук В. М. Бондаренком.

Пусть S — частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество, которое предполагается конечным и не содержащим элемента 0. Его квадратичной формой Титса называют квадратичную форму $q_S : \mathbb{Z}^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Напомним (введенное В. М. Бондаренком) понятие минимаксной эквивалентности ч. у. множеств.

Для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ обозначим через $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) ч. у. множество $T = T' \cup \{a\}$, где $T' = S \setminus \{a\}$ как ч. у. множества (тогда T и S равны как обычные множества), а элемент a является уже максимальным (соотв. минимальным), причем a сравнимо с x в T тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T назовем *минимаксно эквивалентным* ч. у. множеству S, если T равно некоторому ч. у. множеству вида

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \quad (p \geq 0),$$

где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и, для $i \in \{1, \ldots, p\}$, x_i — минимальный (соотв. максимальный) элемент $S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, если $\varepsilon_i = \uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i = \downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $\overline{S} = S$. При этом не требуется, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ были различны.

Ч. у. множество S назовем *NP-критическим* (соотв. *WNP-критическим*), если форма Титса любого его собственного подмножества является неотрицательной (соотв. слабо неотрицательной), но форма Титса самого S таковой не является; слабонеотрицательность — это неотрицательность на векторах с неотрицательными координатами.

Доказана следующая теорема.

Теорема *Ч. у. множество S является NP-критическим тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно некоторому WNP-критическому ч. у. множеству.*