Ф.С. Стонякин (ТНУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина)

Компактный субдифференциал отображений в локально выпуклые пространства: обобщённая теорема о среднем и связь с интегралом Бохнера

Хорошо известно [1, 2], что класс неопределённых интегралов Бохнера отображений в бесконечномерные топологические пространства существенно уже класса (сильно) абсолютно непрерывных отображений. В связи с этим возникает проблема исследования условий представимости в виде неопределённого интеграла Бохнера абсолютно непрерывных отображений F отрезка $I = [a; b]$ в произвольное отделимое вещественное локально выпуклое пространство (ЛВП) E.

Для решения этой задачи мы используем недавно предложенное И.В. Орловым понятие *компактного субдифференциала* или *K-субдифференциала* [3] — [8], определяемое следующим образом

$$\partial_K F(x) = K - \lim_{\delta \to +0} \left(\overline{co} \left\{ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \;\Big|\; 0 < |h| < \delta \right\} \right),$$

где $K - \lim$ означает равномерное топологическое стягивание множеств под знаком предела к их компактному пересечению, а $\overline{co}A$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества $A \subset E$. Если $\partial_K F(x)$ существует, то F называется компактно субдифференцируемым или K-субдифференцируемым в точке x, а $\partial_K F(x)$ компактным субдифференциалом F в точке x.

Понятие субдифференциала, введённое первоначально для вещественных выпуклых функций с целью решения широкого круга задач недифференцируемой оптимизации, стало базовым понятием выпуклого анализа и нашло многочисленные приложения и обобщения [9] — [11].

В наших работах [5, 6] проведён сравнительный анализ понятия понятия компактного субдифференциала со всеми из наиболее известных аналогов субдифференциала выпуклых функций. Показано, что понятие K-субдифференциала отличается от них даже в случае вещественных функций. Но главным достоинством компактного субдифференциала является простота его определения для отображений в ЛВП.

Если F дифференцируемо в точке x, то $\partial_K F(x) = \{F'(x)\}$. В то же время в [4] построены примеры компактно субдифференцируемых отображений, не имеющих обычной производной.

Сделаем замечание о связи компактной субдифференцируемости с классической ддифференцируемостью на отрезке. Доказано [7, 8], что в случаях конечномерного и бесконечномерного ЛВП E ситуация в этом вопросе полярна: если E конечномерно, то из компактной субдифференцируемости на отрезке вытекает обычная дифференцируемость почти всюду, в то время, как для бесконечномерных E построен следующий пример всюду компактно субдифференцируемого отображения на $[a; b]$ и нигде не дифференцируемого, кроме как в одной точке.

Пример 1. Пусть $E = E_S$ — пространство всех вещественных функций на интервале $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ с топологией поточечной сходимости. Определим отображение $x : S \to E$; $x(s) = \xi(s, \cdot)$, $s \in S$, следующим образом:

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} \frac{s}{\theta}, & \text{если } s \le \theta < \frac{2}{3} \ ; \\ \frac{s-1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \le s \ . \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что $\forall s \in [0; 1]$ справедливо $\partial_K x(s) = [x'_-(s); x'_+(s)]$, причём $x_-(s)(\cdot) \ne x_+(s)(\cdot)$ $\forall s \ne 0$, т.е. F не является дифференцируемым всюду, кроме $s = 0$.

Исследованы арифметические свойства K-субдифференциала и получены следующие результаты (теоремы 1 — 3).

Теорема 1.

(i) $\partial_K(\lambda \cdot F)(x) = \lambda \cdot \partial_K F(x)$;

(ii) (*субаддитивность*) $\partial_K(F_1 + F_2)(x) \subset \partial_K F_1(x) + \partial_K F_2(x)$;

(iii) $A \in L(E_1; E_2) \Rightarrow (\partial_K(F \circ A)(x) = A(\partial_K F(x)))$.

Теорема 2. Если функция $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ и отображение $F : [a; b] \to E$ компактно субдифференцируемы в точке x, то их произведение $f \cdot F$ также компактно субдифференцируемо в точке x, причём

$$\partial_K(f \cdot F)(x) \subset F(x) \cdot \partial_K f(x) + f(x) \cdot \partial_K F(x) \ . \tag{1}$$

Теорема 3. Если функция $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ K-субдифференцируема в точке x, а отображение $F : [a; b] \to E$ K-субдифференцируемо в точке $y = f(x)$, то композиция $f \circ F$ K-субдифференцируема в точке x, причём

$$\partial_K F(f(x)) \subset \partial_K F(y) \cdot \partial_K f(x) \ . \tag{2}$$

Если хотя бы одно из отображений F и f в (1) и (2) является дифференцируемым в обычном смысле, то включения (1) и (2) заменяются на равенства.

В работе [12] для отображений $F : [a; \ b] \to E$ была получена обобщённая формула Лагранжа

$$F(b) - F(a) \in m([a; b] \backslash e) \cdot \overline{co} \ F'([a; b] \backslash e) \ , \tag{3}$$

в предположении непрерывности F на $[a; b]$, дифференцируемости на $[a; b] \backslash e$, нулевой слабой меры $F(e)$. Оценка (3) распространена на компактно субдифференцируемые отображения и получен следующий результат.

Теорема 4. Если отображение $F : [a; b] \to E$ непрерывно на $[a; b]$ и компактно субдифференцируемо на $[a; b] \backslash e$, $F(e)$ имеет скалярную меру нуль, то

$$F(b) - F(a) \in m([a; b] \backslash e) \cdot \overline{co} \ \partial_K F([a; b] \backslash e) \ . \tag{4}$$

Исследован ряд свойств сечений (селекторов) $\widehat{\partial}_K F : I \to E$ многозначных отображений $\partial_K F : I \to 2^E$, включая почти всюду сепарабельнозначность. Это позволило получить следующий результат.

Теорема 5. Пусть $F : I = [a; b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду К-субдифференцируемо на I. Тогда любое сечение $\widehat{\partial}_K F \in \partial_K F$ интегрируемо по Бохнеру на I и верно равенство

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x \widehat{\partial}_K F(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \ . \tag{5}$$

С использованием оценки (4) и рассуждений примера 1 можно показать, что в (5) селектор $\widehat{\partial}_K F$, вообще говоря, нельзя заменить обычной производной F', т.е. для отображений в произвольные ЛВП (за пределами пространств Фреше) компактный субдифференциал лучше описывает дифференциальные свойства интеграла Бохнера, чем классическая производная.

Автор выражает признательность профессору И.В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

[1] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962 — 829с.

[2] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[3] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* К-субдифференциалы и К-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства.// Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220 – 221.

[4] *Стонякин Ф.С.* Компактный субдифференциал вещественных функций.//Динамические системы. — 2007.— Вып. 23 — С. 99 – 112.

[5] *Стонякин Ф.С.* Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна. // Компьютерная математика. — 2008. — № 2. — С. 50 – 56.

[6] *Стонякин Ф.С.* Сравнительный анализ понятий компактного субдифференциала и ряда других современных аналогов производной.// Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия «математика, прикладная математика и механика» — В печати.

[7] *Orlov I.V., Stonyakin F.S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15. — № 1. — P. 74 – 90.

[8] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.// Современная математика. Фундаментальные направления. — В печати.

[9] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 472 с.

[10] *Borwein J. M., Zhu Q. J.* A survey of subdifferential calculus with applications// Nonlinear analysis. Ser. A: Theory and methods — 1999. — V. 38, № 6. — P. 62–76.

[11] *Demyanov V. F.* The rise of nonsmooth analysis: its main tools// Кибернетика и системный анализ — 2002. — № 4. — С. 63–85.

[12] *Орлов И. В.* Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств. //Математическая физика, анализ, геометрия (МАГ). — 2001. — **8**, № 4. — С. 419 – 439.