

Сорич А.В. (Інститут математики НАН України, Київ)

Сорич В.А., Сорич Н.М. (Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна)

Наближення лінійних комбінацій аналітичних функцій сумами Фур'є

Нехай $L_{\beta,p}^q$ ($p=1$ до $p=\infty$) — класи 2π -періодичних функцій, що подаються у вигляді згортки $\varphi \in L_p$ із ядром Пуассона $P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $0 < q < 1$, $\beta \in R$, $\|\varphi\|_{L_p} \leq 1$. Будемо вважати, що числа q, q_i, β, β_i ($i = \overline{1, m}$) підпорядковані умові $0 < q \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m \leq 1$, $\beta, \beta_i \in R$, а $\sum_{n,m} (f; x) = \sum_{i=1}^m q_i^n \left(f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - S_{n-1} \left(f_{\beta_i}^{(q_i)}; x \right) \right)$, де $S_n(f; x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур'є функції $f(x)$, $f_{\beta_i}^{(q_i)}(x)$ — похідна порядку $(\psi_i; \beta_i)$ в сенсі Степанця ([1, с.25]) при $\psi_i(k) = q_i^{-k}$.

Зазначимо, що функції із класу $L_{\beta,p}^q$ допускають аналітичне продовження до функції $f(z) = f(x + iy)$, аналітичної в смузі $|y| \leq \ln \frac{1}{q}$.

Основний результат роботи міститься в наступному твердженні.

Теорема. Нехай $0 < q < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m \leq 1$, $\beta, \beta_i \in R$ ($i = \overline{1, m}$), тоді при $n \rightarrow \infty$

$$E_{n,m} \left(L_{\beta,p}^q \right) = \sup_{f \in L_{\beta,p}^q} \left\| \sum_{n,m} (f, x) \right\|_{L_p} = \frac{2}{\pi^2} q^n \left(M + O(1) \frac{q}{(q_m - q)n} \right),$$

$$\text{де} \quad M = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} dt, \quad A(t) = \sum_{i=1}^m \left(g_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} - h_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} \right),$$

$$B(t) = \sum_{i=1}^m \left(g_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} + h_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} \right), \quad g_i(t) = \frac{1 - \frac{q}{q_i} \cos t}{1 - \frac{2q}{q_i} \cos t + \left(\frac{q}{q_i} \right)^2}, \quad h_i(t) = \frac{\frac{q}{q_i} \sin t}{1 - \frac{2q}{q_i} \cos t + \left(\frac{q}{q_i} \right)^2},$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $n, q, q_i, \beta, \beta_i$.

- [1] Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268с.