

М.В. Сильков, О.В. Федоренко (ІПРІ НАН України, Київ)

Математичне моделювання диференціально-різницевого рівняння з використанням гіперкомплексних числових систем

Одним з важливих застосувань диференціально-різницевого рівняння є їх використання для опису засобів цифрової обробки сигналів [1]. Традиційно в якості коефіцієнтів таких рівнянь використовуються дійсні числа. Такі засоби цифрової обробки сигналів є дуже поширеними і вони є невід'ємною частиною багатьох пристроїв. Тому будь-яке покращення їх характеристик є важливим. Одним з інструментів досягнення цієї мети є використання гіперкомплексних числових систем для представлення коефіцієнтів диференціально-різницевого рівняння.

Розглянемо диференціально-різницево рівняння з дійсними коефіцієнтами $y[t] = \sum_{i=0}^l a_i \cdot x[t-i] - \sum_{i=1}^l b_i \cdot y[t-i]$, йому відповідає передавальна функція з дійсними коефіцієнтами $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$. Припустимо, що в нашому випадку коефіцієнтами є гіперкомплексні числа вимірності m , а степінь знаменника і чисельника передавальної функції відносно z буде l . Помножимо чисельник і знаменник такої функції на вираз спряжений до знаменника. В результаті передавальна функція з гіперкомплексними коефіцієнтами матиме вигляд $H(z) = \frac{Y(z) \cdot \overline{X(z)}}{N(X(z))} = \sum_{i=1}^m \frac{f_i(z)}{N(X(z))} \cdot e_i = \sum_{i=1}^m H_{H_i}(z) \cdot e_i$, де кожен з виразів $H_{H_i}(z)$, при $i = 1, \dots, m$, є компонентою гіперкомплексного числа вимірності m і може розглядатися як передавальна функція з дійсними коефіцієнтами порядку $m \cdot l$.

Розрахунок гіперкомплексних коефіцієнтів диференціально-різницевого рівняння по відомому відповідному диференціально-різницево рівнянню з дійсними коефіцієнтами відбувається шляхом прирівнювання коефіцієнтів при рівних степенях z чисельника і знаменника вихідної передавальної функції з дійсними коефіцієнтами з відповідними коефіцієнтами одного з виразів $H_{H_i}(z)$. Таким чином отримуємо дві системи рівнянь, розв'язок яких дає значення гіперкомплексних коефіцієнтів диференціально-різницевого рівняння [2].

Для побудови і моделювання засобів цифрової обробки сигналів можна використовувати різні гіперкомплексні числові системи. При цьому потрібно мати на увазі, що таблиці множення базисних елементів деяких ГЧС мають нульові елементи, в деяких з них кількість таких елементів досить велика. Через це, норма чисел, що належать таким ГЧС і функція $f_i(z)$ будуть мати дуже простий вигляд. Може вийти так, що коефіцієнти при деяких степенях оператора z будуть нульовими. Отже форма диференціально-різницевого рівняння і передавальної функції буде усічена, тому така передавальна функція матиме обмежене застосування. В такому випадку системи рівнянь, що згадувалися раніше, не завжди будуть мати розв'язок, і значить, для деяких диференціально-різницевого рівнянь з дійсними коефіцієнтами буде неможливим побудувати диференціально-різницево рівняння з гіперкомплексними коефіцієнтами.

Як показали результати досліджень, використання ГЧС при побудові диференціально-різницевих рівнянь і моделюванні дозволяє істотно покращити важливі характеристики засобів цифрової обробки сигналів.

Роботу виконано при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України; проект № Ф29.1/026.

- [1] S. Mitra. Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach / McGraw-Hill, 2005. – 972 p.
 - [2] А.І. Петренко, М.В. Синьков, О.В. Федоренко Основи теорії побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2008. – Т. 10, № 3.
-