В.В. Шумилова (Филиал НОУ ВПО "Московский психолого-социальный институт" в г. Муроме Владимирской области, Муром, Россия)

О резольвентной сходимости операторов при усреднении задач на периодических составных структурах

Пусть μ — периодическая борелевская мера в $\mathbb{R}^N$, описывающая периодическую составную структуру F. Это означает, что мера μ представима в виде: $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k$, где μ_i — периодическая борелевская мера в $\mathbb{R}^N$, характеризующая некоторую компоненту F_i $(i = 1, 2, ..., k)$ составной структуры F. В качестве компонент составной структуры можно рассматривать периодические сетки, периодические фрактальные построения и т.д. Предполагая меру μ эргодичной [1], обозначим через μ_ε скейлинг-меру, определенную равенством: $\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^N$. Известно, что мера μ_ε слабо сходится к мере Лебега dx, $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$ [1].

В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим следующую задачу усреднения в операторном виде

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon + \lambda u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon), \tag{1}$$

где λ — некоторое положительное число, $\mathcal{A}_\varepsilon$ — неотрицательный самосопряженный оператор в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, $f_\varepsilon \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.

Рассмотрим также усредненную задачу, соответствующую задаче (1)

$$\mathcal{A}u + \lambda u = f, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

где $\mathcal{A}$ — неотрицательный самосопряженный оператор в $L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

(i) при $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ имеет место слабая резольвентная сходимость

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} f_\varepsilon \rightharpoonup (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1} f \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon); \tag{2}$$

(ii) при $f_\varepsilon \to f$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ имеет место сильная резольвентная сходимость

$$(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} f_\varepsilon \to (\mathcal{A} + \lambda I)^{-1} f \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon). \tag{3}$$

В данной работе доказывается, что как слабая резольвентная сходимость (2), так и сильная резовентная сходимость (3) имеют место и в пространствах $L^2(\Omega, d\mu_{i\varepsilon})$, $i = 1, 2, ..., k$. Кроме того, исследуется поведение при $\varepsilon \to 0$ собственных векторов оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ в пространствах $L^2(\Omega, d\mu_{i\varepsilon})$, $i = 1, 2, ..., k$. Также приводятся примеры периодических составных структур с фрактальными компонентами, для которых спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ сходится по Хаусдорфу к спектру предельного оператора $\mathcal{A}$.

[1] Жиков В.В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сборник, 2000. — Т. 191, №7. — С. 31-72.