Штепина Т.В. (Донецкий институт социального образования, Донецк)

Гиперболические гармоники и интегральные операторы на псевдоевклидовых пространствах

Рассмотрим внутренность U верхней полы светового конуса

$$U = \{x \in \mathbb{R}^{n-1,1} |\, [x,x] > 0,\ x_n > 0\},$$

где $[x,x] = -x_1y_1 - \ldots - x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n$ — индефинитное скалярное произведение. Множество S_H точек из U, удовлетворяющих $[x,x] = 1$, называется пространством Лобачевского. Рассмотрим пространство $L^1_{loc}(S_H, d\xi)$ локально интегрируемых по мере $d\xi$ функций на S_H где $d\xi$ — инвариантная относительно действия $G = SO_0(n-1,1)$ мера. В этом пространстве действует квазирегулярное представление R группы G, определяемое равенством $(R(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, $x \in S_H$, $g \in SO_0(n-1,1)$.

Разложение R на неприводимые может быть получено [1] с помощью поверхностных гиперболических гармоник

$$H_L^{n,\sigma}(\theta) = \sinh^{\frac{3-n}{2}} \theta_{n-1} \mathfrak{P}^{\frac{3-n}{2}-k_0}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}(\cosh\theta_{n-1}) S_K^{k_0}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}),$$

где $\mathfrak{P}^{\mu}_{\nu}(x)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, $S_K^{k_0}(\theta)$ — поверхностные сферические гармоники, $L = (k_0, K)$, $K = (k_1, ..., k_{n-4}, \pm k_{n-3})$, причем $k_0 \geq k_1 \geq \ldots \geq k_{n-3} \geq 0$. Если мы распространим функции $H_L^{n,\sigma}(\theta)$ с пространства S_H на внутренность U верхней полы светового конуса по однородности со степенью σ, то полученные функции $\widetilde{H}_L^{n,\sigma}(\theta)$ на U будут решениями волнового уравнения $\Box \widetilde{H}_L^{n,\sigma}(\theta) = 0$, т.е. они являются пространственными гиперболическими гармониками.

Рассмотрим следующее интегральное преобразование $\mathcal{F}_h$ в $L^1_{loc}(U)$, аналогичное преобразованию Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$[\mathcal{F}_h](\xi) = \frac{2\cosh(\pi\rho/2)}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_U e^{-i[x,\xi]} f(x)\, dx, \quad dx = d\xi d\rho.$$

Предложение. *Пусть $f(x)$ на U является произведением псевдорадиальной функции и пространственной гиперболической гармоники: $f(x) = f_0([x,x]^{1/2}) \widetilde{H}_L^{n,\sigma}(\theta)$, где $f_0(r)$ такое, что $f(x) \in L^1(U) \cap L^2(U)$. Тогда ее $\mathcal{F}_h$–образ имеет вид:*

$$[\mathcal{F}_h f](\xi) = F^{n,\sigma}\left([\xi,\xi]^{1/2}\right) \widetilde{H}_L^{n,\sigma}(\xi),$$

где

$$F^{n,\sigma}(r) = \left(-\frac{\pi i}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} 2^{n/2} \int\limits_0^{+\infty} f_0(s) s^{2\sigma+n/2} K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(irs) ds.$$

[1] Штепин В.В., Штепина Т.В. Применение сплетающих операторов в функциональном пространстве.// Известия РАН. Сер. мат. **73**, N 4, 2009.