Шаташвили А.Д., Сохадзе Г.А., Фомина Т.А., Фомин-Шаташвили А.А. (Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина)

О существовании и единственности решения общего дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка в гильбертовом пространстве

Пусть H сепарабельное, вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и нормой $\|\cdot\|$; $\pi(u,v)$, u, $v\in H$, - билинейная форма удовлетворяющая условию (коэрцитивность)

$$\pi(u,u)\geq\alpha\|u\|^2,\ \ \alpha>0,\ \ \forall u\in H;$$

$L(u)$, $u\in H$ - линейная форма. На основании известной леммы Лакса-Милграма (см. [1], (2.14)) можно утверждать, что существует единственный элемент $u\in H$ для которого выполняется равенство $\pi(u,v)=L(v)$ для любого $v\in H$.

Рассмотрим Гильберто-Шмидтовское оснащение $H_+\subset H\subset H_-$ и предположим, что на σ-алгебре $\Im$ борелевских подмножеств пространства H_- задана некоторая вероятностная мера μ, которая обладает логарифмической производной $\beta_\mu(x,h)=\langle\lambda(x),h\rangle$ вдоль постоянных направлений $h\in H_+$ (см. [2]), где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ спаривание элементов H_- и H_+. Известно, что если $z(x):H_-\to H_+$ является гладким векторным полем, то $\beta_\mu(x,z(x))=\langle\lambda(x),z(x)\rangle-Spz'(x)$ (см. [3]). Этот функционал имеет смысл и в том случае, когда $z(x):H_-\to H$ и его производная $z'(x)$ является оператором Гильберта-Шмидта, хотя отдельные слагаемые не имеют смысла. Это расширение опять будем обозначать через $\beta_\mu(x,h)$.

Пусть A коэрцитивный линейный оператор $(Au,u)_H\geq\alpha\|u\|_H^2$, $\alpha>0$ с Гильберто-Шмидтовским обратным. Рассмотрим билинейную форму

$$\pi(u,v)=\int_H\big(Au'(x),v'(x)\big)_H\,\mu(gx)+\int_H a(x)u(x)v(x)\mu(dx),$$

где $a(x):H\to R$, $a(x)\geq\alpha>0$, $u(x):H\to R$, $v(x):H\to R$. ясно, что $\pi(u,u)\geq\alpha\|u\|_{H_+}^2$, где $H_+=W_1^2$. Пусть $L(v)=\int_H f(x)v(x)\mu(dx)$ линейный оператор в H. Согласно выше указанной лемме существует u, для которого $\pi(u,v)=L(v)$ для любого $v\in H_+$. Значит

$$\int_H\big(Au'(x),v'(x)\big)_H\,\mu(dx)+\int_H a(x)u(x)v(x)\mu(dx)=\int_H f(x)v(x)\mu(dx),$$

откуда можем написать

$$-\int_H\beta_\mu\big(Au'(x),x\big)v(x)\mu(dx)+\int_H a(x)u(x)v(x)\mu(dx)=\int_H f(x)v(x)\mu(dx).$$

Из-за произвольности гладкого функционала получим

$$-\beta_\mu\big(Au'(x),x\big)+a(x)u(x)=f(x).$$

Значит это уравнение имеет единственное решение. Если μ гауссовская мера в H_- с единичным корреляционным оператором в H, то уравнение принимает вид

$$trAu''(x)-\big(Au'(x),x\big)_H+a(x)u(x)=f(x).$$

Соответственно, можем поставить общую задачу исследования уравнения

$$Lu(x)+F(x,u(x),u'(x)\sigma)=0,\quad x\in H, \tag{1}$$

где $L\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\beta_{\mu}(x,\sigma\sigma^{*}\varphi'(x))+\langle Ax,\varphi'(x)\rangle+\langle b(x),\varphi'(x)\rangle$.

Поставленная задача находится в тесной связи с так называемыми обратными стохастическими дифференциальными уравнениями (см.[4]). Рассмотрим уравнение

$$Y_t^x=\int_t^{\infty}F(X_s^x,Y_s^x,Z_s^x)ds-\int_t^{\infty}Z_s^x dW_s \qquad (2)$$

где $\{X_t^x\}_{t\ge 0}$ является решением следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t^x=AX_t^x dt+b(X_t^x)dt+\sigma dW_t,\quad t\ge 0,\quad X_0^x=x.$$

Теорема. Если (Y^x,Z^x) есть единственное решение уравнения (2), то решение уравнения (1) существует, единственно и можно представить в виде: $u(x)=Y_0^x$, $x\in H$, при этом $Y_t^x=u(X_t^x)$ и $Z_t^x=u'(X_t^x)\sigma$.

[1] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. «Мир», Москва, 1972.

[2] Богачев В. В. Дифференцирумые меры и исчисление Маллявэна. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

[3] Далецкий Ю. Л., Белополская Я. Стохастическая дифференциальная геометрия. 1988.

[4] Briand Ph., Confortola F.. Quadratic BSDE's with Random Terminal Time and Elliptic PDE's in Infinite Dimension. Electronic J. of Probability, Vol. 13, paper no. 54, 2008, 1529-1561.