

С.Б.Вакарчук (Днепропетровский университет экономики и права, Днепропетровск, Украина); *М.Ш.Шабозов* (Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан)

О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в комплексной плоскости

Среди экстремальных задач теории аппроксимации особый интерес представляет вычисление точных значений различных n -поперечников классов функций и построение наилучших линейных методов приближения. Данное сообщение продолжает указанную тематику. Приведем один из полученных результатов. Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R \geq 1$, $U := U_1$; $A(U_R)$ — множество аналитических в U_R функций. Через $\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(U)$, $1 \leq p < \infty$, обозначим пространство комплекснозначных в U функций f , для которых $\|f\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int \int_U |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p} < \infty$. Пусть $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная измеримая в U функция; $\mathcal{L}_{p,\gamma} := \mathcal{L}_p(U, \gamma)$ — пространство комплекснозначных в U функций f , для которых $\gamma^{1/p} f \in \mathcal{L}_p$ и $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{\mathcal{L}_p}$. Под $B_{p,\gamma} := B_p(U, \gamma)$ понимаем пространство функций $f \in A(U)$ таких, что $f \in \mathcal{L}_{p,\gamma}$. Символом $H_{p,R} := H_p(U_R)$ обозначим пространство Харди. Полагаем, что $\Psi(t)$, $t \geq 0$, — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Пусть $W_{p,R}^m(\Psi) := \left\{ f \in A(U_R) : f^{(m)} \in H_{p,R}, \frac{k}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2k)} \omega_2(f^{(m)}, 2t)_{H_{p,R}} dt \leq \Psi\left(\frac{\pi}{2k}\right) \forall k \in \mathbb{N} \right\}$, где $m \in \mathbb{N}$; $\omega_2(\varphi, t)_{H_{p,R}}$, $t \geq 0$, — модуль непрерывности второго порядка функции $\varphi \in H_{p,R}$; $\alpha_{n,m} := n(n-1)\dots(n-m+1)$, $n \geq m$.

Теорема. Пусть $R \geq 1$; $1 \leq p < \infty$; $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, и мажоранта $\Psi(t)$ при $0 < t \leq \pi/2$ удовлетворяет ограничению

$$\frac{\Psi(\lambda t)}{\Psi(t)} \geq \begin{cases} 1 - 2 \sin(\lambda \pi) / (\lambda \pi), & 0 < \lambda < 2, \\ 2(1 - 1/\lambda), & \lambda \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} b_n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) &= b_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = d^n(W_{p,R}^m(\Psi); B_{p,\gamma}) = \\ &= d^n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = d_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = \delta_n(W_{p,R}^m(\Psi); \mathcal{L}_{p,\gamma}) = \\ &= \frac{R^{m-n}}{\alpha_{n,m}} \Psi\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right) \left(\int_0^1 \rho^{n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где b_n , d^n , d_n , δ_n соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный n -поперечники.

Ограничению (1) удовлетворяет, например, функция $\Psi_*(t) = t^{2/(\pi-2)}$.