Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії.

Сєров М.І., Сєрова М.М., Омелян О.М., Карпалюк Т.О.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

E-mail: k26@pntu.edu.ua

Більшість класичних рівнянь математичної фізики володіють широкими симетрійними властивостями. В.І. Фущич [1] в своїй науковій творчості висунув більш сильну гіпотезу: «Всяке диференціальне рівняння, яке описує реальні фізичні процеси повинно задовольняти принципу відносності Галілея або Пуанкаре-Ейнштейна, тобто повинно бути інваріантним відносно алгебри Галілея або алгебри Пуакаре».

Ще Софус Лі [2] дослідив симетрійні властивості лінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx}. \tag{1}$$

і встановив, що воно інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея (вперше цю алгебру так називати запропонував В.І. Фущич):

$$AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ, \quad Q = -\frac{1}{2}u\partial_u, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u,$$
$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - (\frac{1}{2}t + \frac{x^2}{4})u\partial_u\rangle. \tag{2}$$

Якщо узагальнити рівняння (1) нелінійним чином:

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x) \tag{3}$$

та

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x) + h(u), \tag{4}$$

то одержимо нелінійні рівняння дифузії та реакції–дифузії, які добре відомі в літературі і застосовуються для опису реальних фізичних процесів. Однак з робіт Овсяннікова Л.В. [3] та Дородніцина В.А. [4] випливає, що рівняння (3) та (4) неінваріантні відносно алгебри Галілея, якщо вони локально нееквівалентні лінійному рівнянню (1).

Ми поставили задачу з'ясувати, чи існують галілеївськи–інваріантні системи нелінійних рівнянь дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] \tag{5}$$

та реакції - дифузії

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x] + H(U), \tag{6}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2$, $F(U) = \big(f^{ab}(U)\big)$, $H(U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix}$ — матриці розмірності 2×2 та 2×1 відповідно.

В результаті проведених досліджень нам вдалося встановити наступні твердження.

Теорема 1. ***Нелінійна ситема рівнянь дифузії (5) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системі:***

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2) \end{pmatrix} U_x \right], \tag{7}$$

де λ_1, λ_2 — довільні сталі, причому базисні генератори алгебри $AG_2(1,1)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} &AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2, \\ &\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{x^2}{2}Q_1 + tQ_2\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

а оператори Q_1, Q_2 задаються формулами:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}. \tag{9}$$

Теорема 2. ***Нелінійна ситема рівнянь реакції дифузії (6) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна одній з наступних систем:***

а)

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \omega^{\frac{4}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \lambda_4 u^2 \omega^{\frac{4}{\lambda_2 - \lambda_1}} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_3, λ_4 — довільні сталі, причому базисні генератори алгебри $AG_2(1,1)$ мають вигляд (8) при:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}; \tag{11}$$

б)

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 4\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 (u^1)^5 e^{\frac{u^2}{u^1}} \\ (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1)(u^1)^4 e^{\frac{u^2}{u^1}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де λ_1, λ_3, λ_4 — довільні сталі, причому базисні генератори алгебри $AG_2(1,1)$ мають вигляд (8) при:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}(u^a\partial_{u^a} - 4u^1\partial_{u^2}), \quad Q_2 = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}; \tag{13}$$

в)

$$U_t = \partial_x\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1\frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x\right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1(u^2)^2 \\ \lambda_4(u^2)^3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_3, λ_4 — довільні сталі, причому базисні генератори алгебри $AG_2(1,1)$ мають вигляд (8) при:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}. \tag{15}$$

Слід зазначити, що системи (10) та (12) були одержані в роботах Черніги Р.М., Кінга Д.Р. [5] та Нікітіна А.Г., Вілтшира Р.Д. [6], а система (14) одержана нами вперше. Як ми з'ясували, система вигляду (14) застосовується при описанні біологічних процесів хемотаксису, тобто симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль і носить назву модель Келлера – Сегеля.

Якщо ж узагальнити лінійне рівняння теплопровідності (1) нелінійним рівнянням конвекції дифузії

$$u_t + u_{xx} + g(u)u_x = 0, \tag{16}$$

то добре відомо, що таке рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне рівнянню Бюргерса

$$u_t + u_{xx} + uu_x = 0, \tag{17}$$

причому базисні оператори алгебри $AG_2(1,1)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t\partial_x - \partial_u, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \\ &\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - (x - tu)\partial_u. \end{aligned} \tag{18}$$

Узагальнення рівняння Бюргерса (17) на випадок системи рівнянь має вигляд

$$\vec{u_t} + \Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = 0, \tag{19}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(t,\vec{x}) \in R^n$, $\vec{x} \in R^n$. При цьому зберігається інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея вигляду

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^b\partial_{u^a} - u^a\partial_{u^b}, \quad G_a = t\partial_a + \partial_{u^a}, \\ &D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a}, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a + (x_a - tu^a)\partial_{u^a}, \end{aligned} \tag{20}$$

де $a, b = \overline{1, n}$.

Система рівнянь Бюргерса (19) є основою системи рівнянь Нав'є – Стокса, яка є однією з основних моделей гідродинаміки. Наприклад, одна з модифікацій системи Нав'є – Стокса може бути записана наступним чином

$$\begin{aligned} &\vec{u_t} + \Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ &\rho_t + div(\rho\vec{u}) = 0, \\ &p = f(\rho). \end{aligned} \tag{21}$$

Система рівнянь Нав'є – Стокса (21) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, якщо

$$f(\rho) = \lambda\rho^{\frac{n+2}{n}}, \tag{22}$$

тобто коли вона має вигляд

$$\begin{aligned} &\vec{u_t} + \Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \lambda_1\rho^{\frac{2-n}{n}}\vec{\nabla}\rho, \\ &\rho_t + div(\rho\vec{u}) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Незважаючи на численні переваги, система рівнянь Нав'є – Стокса має один недолік. У ній кількість компонент $\vec{u}$ повинна співпадати з кількістю просторових змінних $\vec{x}$, тобто $\vec{u} \in R^n$ і $\vec{x} \in R^n$.

У літературі спостерігаються спроби замінити систему рівнянь Нав'є – Стокса іншою системою, в якій $\vec{u} \in R^m$, а $\vec{x} \in R^n$, де m і n не обов'язково рівні.

На нашу думку це потрібно робити так. Спочатку рівняння (16) узагальнити системою нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$U_t = \Delta U + G^a(u)U_a, \tag{24}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $U_a = \dfrac{\partial U}{\partial x_a}$, $G^a(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$. Потім знайти такі матриці $G^a(U)$, при яких система (24) була б інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n)$. Ця задача розв'язана нами для випадків $m \leq 3$ і $n \leq 3$. Зокрема встановлено, що при $m \leq n$ система (24) галілеївськи неінваріантна, при $m = n$ у класі систем (24) лише система Бюргерса (19) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1, n)$. Якщо ж $m > n$, то тут ситуація наступна

a) $(m, n) = (2, 1)$. Нами встановлено (див. [7]), що існує лише 5 локально нееквівалентних систем класу (24), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1, 1)$;

b) $(m, n) = (3, 2)$. У цьому випадку (див. [8]) існує 4 локально нееквівалентних систем класу (24), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1, 2)$;

c) $(m,n) = (3,1)$. Ми встановили, що існує 18 локально нееквівалентних систем класу (24), інваріантних відносно алгебри $AG_2(1,1)$.

За браком часу ми ці системи тут не наводимо. Ці результати подано до друку і ми надіємося, що через деякий час вони будуть опубліковані.

І, нарешті, останній крок: узагальнити одержані системи до системи типу Нав'є–Стокса. Покажемо це на одному із прикладів. Система

$$\vec{u}_t + u^1\vec{u}_1 + \vec{u}_{11} = 0, \tag{25}$$

де $\vec{u} = \vec{u}(t,x_1) \in R^2$ інваріантна (див. [7]) відносно узагальненої алгебри $AG_2(1,1)$:

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_{x_1}, \quad G = t\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2t\partial_t + x_1\partial_{x_1} - u^1\partial_{u^1}, \\ &\Pi = t^2\partial_t + tx_1\partial_{x_1} + (x_1 - tu^1)\partial_{u^1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Узагальнимо систему (25) наступною системою

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + u^1\vec{u}_1 + \vec{u}_{11} = \vec{f}(\rho)\rho_1, \\ &\rho_t + \partial_1(\vec{g}(\rho)\vec{u}) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Вимагаємо, щоб система (27) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. [9] ***Система (27) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд***

$$\begin{aligned} &u^1_t + u^1u^1_1 + u^1_{11} = \lambda_1\rho\rho_1, \\ &u^2_t + u^1u^2_1 + u^2_{11} = \lambda_2\rho_1, \\ &\rho_t + \partial_1\left[\rho(u^1 + \lambda_3\rho u^2)\right] = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

λ_1***,*** λ_2***,*** λ_3 ***— довільні сталі. Базисні генератори алгебри*** $AG_2(1,1)$ ***задаються формулами***

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_1, \quad G = t\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho, \\ &\Pi = t(t\partial_t + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho) + x_1\partial_{u^1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Оскільки система (28) узагальнює одновимірну систему рівнянь Нав'є – Стокса по формі і має аналогічні симетрійні властивості — задовольняє принципу відносності Галілея, то вона претендує на описання реальних процесів гідродинаміки у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної x_1.

Підсумовуючи сказане вище, можна зробити висновок, що метод С. Лі є потужним методом, за допомогою якого серед класу математичних моделей можна відібрати ті, що задовольняють тому чи іншому принципу відносності.

Література

[1] Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. — Киев.: Наукова думка, 1989. — 339 с.

[2] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung / S. Lie // Arch for Math. — 1881. — V6, № 3. — P. 328–368.

[3] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[4] Дородницын В.А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях / В.А. Дородницын, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

[5] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2000. — A 33. — P. 267–282.

[6] Nikitin A.G. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.

[7] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 / Глеба Аліна Володимирівна. — К., 2003. — 120 с.

[8] Жадан Т.О. Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея / Жадан Т.О. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика. Механіка". — 2004. — № 11-12. — С. 95–100.

[9] Сєрова М.М. Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса / Сєрова М.М. // Збіпник праць інституту математики НАН України: — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 270–275.