А. С. Сердюк, І. В. Соколенко (Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Асимптотика найкращих рівномірних наближень інтегралів Пуассона функцій з класу H_ω

Нехай $C^q_\beta H_\omega$ — множина всіх неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, які задаються згортками

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)P^q_\beta(t)dt,$$

де A_0 — довільна константа, $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, — ядро Пуассона, $\varphi \in H_\omega = \{g \in C: \ |g(t) - g(t')| \le \omega(|t-t'|) \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Кожній функції f із класу $C^q_\beta H_\omega$ поставимо у відповідність тригонометричний поліном $U_{n-1}(f;x) = U_{n-1}(q;\beta;f;x)$ вигляду

$$U_{n-1}(f;x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k^{(n)}(a_k \sin kx - b_k\cos kx)\right\},$$

де $a_k = a_k(\varphi)$, $b_k = b_k(\varphi)$, $k = 0,1,2,...,$ — коефіцієнти Фур'є функції φ, а числа $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(q;\beta)$ і $\nu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)}(q;\beta)$, $k = 0,1,...,n-1$, $n \in \mathbb{N}$, означаються за допомогою рівностей

$$\lambda_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k})\cos\frac{\beta\pi}{2}, \qquad \nu_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k})\sin\frac{\beta\pi}{2}, \qquad k = \overline{1, n-1}.$$

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; U_{n-1})_C = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} \max_x |f(x) - U_{n-1}(f,x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

і

$$E_n(C^q_\beta H_\omega)_C = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} \inf_{T_{n-1}} \max_x |f(x) - T_{n-1}(f,x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

де inf розглядається по усіх можливих тригонометричних поліномах $T_{n-1}(x)$ порядку не більшого ніж $n-1$.

Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді при* $n \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}(C^q_\beta H_\omega; U_{n-1})_C \\ E_n(C^q_\beta H_\omega)_C\end{array}\right\} = \frac{2\theta_\omega\, q^n}{\pi}\int_0^{\pi/2}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t\,dt + \frac{O(1)q^{n+\frac{1}{2}}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \qquad (1)$$

де $\frac{2}{3} \le \theta_\omega \le 1$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежена відносно параметрів* n, q *і* β.