Л.М. Семчишин
(Чортківський інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль)

До розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з $m-$ мірними $\lambda-$ матрицями

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка виникає при розв'язуванні динамічної моделі В. Леонтьєва

$$Y(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)(E-B(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m))=C(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m), \qquad (1)$$

в якій $B(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)-$ регулярна матриця розміру $n\times n$, елементами якої є многочлени степеня l. Права частина рівняння визначається як вектор

$$C(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\left(c_{1,n+1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),c_{2,n+1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),...,c_{n,n+1}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right)^T$$

многочленів степеня l.

Елементи системи (1) задаються формулами

$$a_{i,j}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}a_{i,j}(k_1k_2...k_m)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n+1}\right).$$

З огляду на це розглядається метод, що дозволяє звести розв'язання системи (1) до обчислення невідомих систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими коефіцієнтами спеціального вигляду [2].

Оскільки $B(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),C(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)-$ поліноміальні матриці, то їх можна подати у вигляді матричних поліномів

$$B(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}B_{k_1k_2...k_m} \text{ та } C(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}C_{k_1k_2...k_m}.$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді відношення двох поліномів

$$Y(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\frac{\sum\limits_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}X_{k_1k_2...k_m}}{\sum\limits_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}}, \qquad (2)$$

де $X_{k_1k_2...k_m}$ – вектори розмірності n, $Z_{k_1k_2...k_m}$ – скалярні величини.

Невідомі $X_{k_1k_2...k_m}$ та $Z_{k_1k_2...k_m}$ обчислимо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи (2) систему (1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}X_{k_1k_2...k_m}\left(E-\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}B_{k_1k_2...k_m}\right)=\\&=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}C_{k_1k_2...k_m}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Згрупувавши члени у лівій і правій частинах отриманого рівняння та прирівнявши після цього коефіцієнти при однакових степенях λ, то для визначення невідомих матричних коефіцієнтів $X_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ та $Z_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ одержимо систему з числовими елементами.

$$\begin{cases} X_{00..0}\left(E - B_{00..0}\right) - Z_{00..0} C_{00..0} = 0; \\ X_{10..0}\left(E - B_{00..0}\right) + X_{00..0}\left(E - B_{10..0}\right) - \left[Z_{10..0} C_{00..0} + Z_{00..0} C_{10..0}\right] = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{k_1=0}^{l} X_{l-k_1,0..0}\left(E - B_{k_1 0..0}\right) - \sum\limits_{k_1=0}^{l} Z_{l-k_1,0..0} C_{k_1 0..0} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\sum\limits_{k_1=0}^{q} \sum\limits_{k_2=0}^{q} \ldots \sum\limits_{\substack{k_t=0 \\ k_1+k_2+..+k_t=q,\, t<m}}^{q} X_{q-k_1,q-k_2,\ldots,q-k_t,0..0} C_{k_1,k_2,\ldots k_t 0..0} = 0; \end{cases}$$

Для розв'язання отриманої системи використано, алгоритм схеми розрізання [3].

Література

1. Бухвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
2. Боюн В.П. Скінченно-різницеві підходи до оптимізації обчислень матриць із складними елементами і множення їх на довільний вектор // В зб. наук. праць. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова, 1999. – С. 61-64.
3. Недашковський М.О., Ковальчук О.Я. Обчислення з $\lambda-$матрицями. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
4. Панкратьев Е.В. Компьютерная алгебра. Факторизация многочленов. – М.: Изд-во МГУ, 1998.